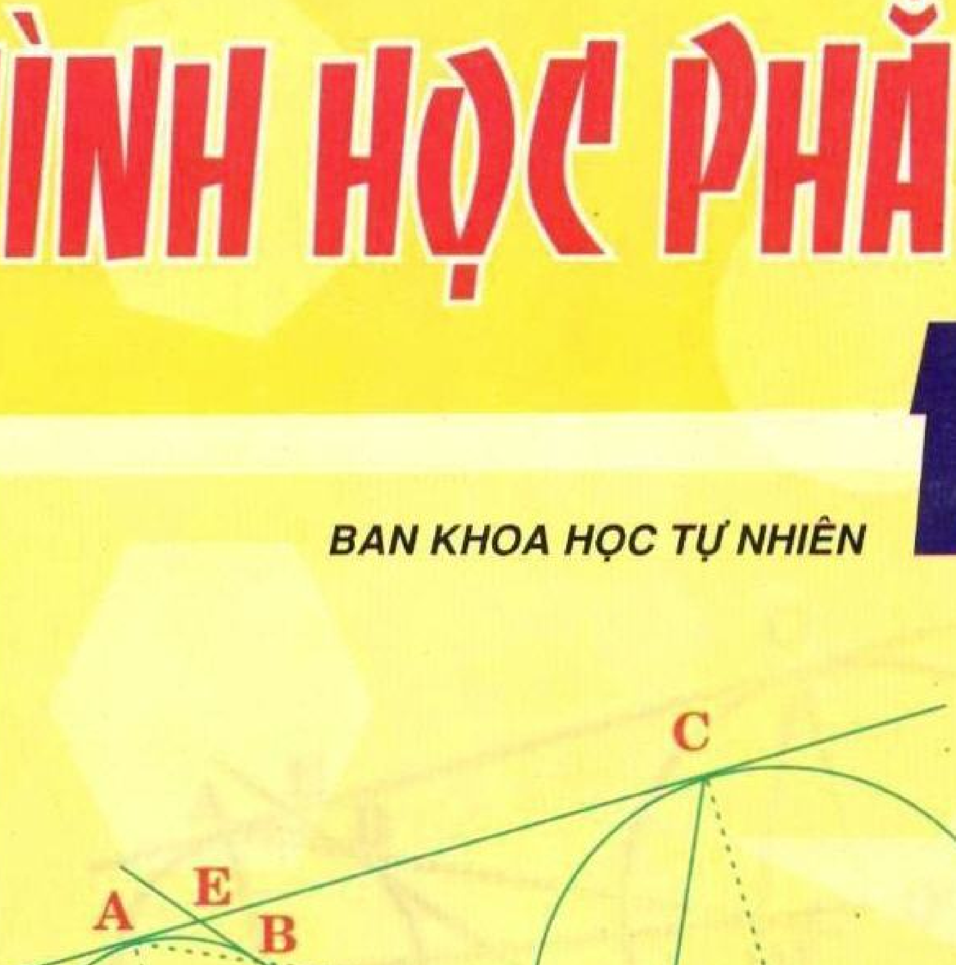
ĐỖ THANH SƠN

Khoa Toán cơ - Tin học - ĐH Khoa học Tự nhiên
ĐH Quốc gia Hà Nội

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HÌNH HỌC PHẲNG
10

BAN KHOA HỌC TỰ NHIÊN



DHQGHN
.22
D-S
06
1425

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐỖ THANH SƠN
Khoa Toán cơ - Tin học - ĐH Khoa học Tự nhiên
ĐH Quốc gia Hà Nội

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
HÌNH HỌC PHẲNG
10

BAN KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Cuốn "***Phương pháp giải toán hình học phẳng 10***" được biên soạn để phục vụ việc học tập môn toán nói chung và môn hình học nói riêng cho học sinh các lớp thuộc khối chuyên Toán - Tin, khoa Toán cơ - Tin học ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. Cuốn sách này có thể dùng cho học sinh các lớp năng khiếu toán, học sinh các lớp chọn, các thầy, cô giáo làm tài liệu tham khảo, các em học sinh có nhu cầu nâng cao kiến thức môn hình học để thi vào Đại học hoặc Cao đẳng.

Nội dung cuốn sách đề cập đến các phương pháp giải toán hình học phẳng lớp 10 (cả chuyên ban lẫn không chuyên ban) và được chia thành 3 chương cùng với 1 phụ lục, trong mỗi chương có nhiều vấn đề mà mỗi vấn đề được cấu trúc thành 3 tiết liên tiếp. Tiết thứ nhất là phần tổng kết lý thuyết của vấn đề làm cơ sở xây dựng phương pháp giải toán hoặc tổng quan về một phương pháp giải toán từ một hoặc một số hệ quả hoặc bài toán phụ, tiết thứ hai là các ví dụ minh họa và tiết cuối cùng là hệ thống các bài tập tự giải có kèm theo đáp số hoặc hướng dẫn cách giải. Chương I đề cập các vấn đề về véc tơ và tọa độ. Chương II đề cập đến các hệ thức lượng trong hình học. Chương III đề cập đến các phép biến đổi hình học và cuối cùng là phần phụ lục. Phần phụ lục đề cập đến một số vấn đề nâng cao dành cho các học sinh thích tìm hiểu sâu về toán và nội dung của nó vượt ra ngoài quy định của chương trình Phổ thông.

Tuy nhiên nội dung và hình thức trình bày của cuốn sách có thể có nhiều khiếm khuyết, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy giáo, cô giáo, các bạn đồng nghiệp, các em học sinh và độc giả trong cả nước để lần tái bản sau, sách có chất lượng tốt hơn. Thư góp ý có thể gửi theo địa chỉ:

Khoa Toán cơ - Tin học, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội

Thạc sĩ ĐỖ THANH SƠN

Chương I

VÉC TƠ VÀ TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

VÉC TƠ TRONG MẶT PHẲNG

1. TÓM LƯỢC NHỮNG ĐỊNH NGHĨA VÀ KHÁI NIỆM VỀ VÉC TƠ TRONG MẶT PHẲNG

Định nghĩa véc tơ

Véc tơ là một đoạn thẳng được quy định một chiều, chiều của véc tơ là thứ tự hai đầu mút của đoạn thẳng. Đầu mút thứ nhất được gọi là gốc (điểm đầu), đầu mút thứ hai được gọi là ngọn (điểm cuối) của véc tơ.

Đường thẳng chứa véc tơ được gọi là phương của véc tơ, độ dài đoạn thẳng được gọi là độ dài véc tơ. Véc tơ được kí hiệu bằng hai cách khác nhau. Cách kí hiệu bằng hai chữ in, chẳng hạn:

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{MN}$$

đọc là véc tơ AB, véc tơ MN. Độ dài các véc tơ được kí hiệu:

$$|\overrightarrow{AB}|,\ |\overrightarrow{MN}| \text{ hoặc } AB,\ MN.$$

Cách kí hiệu bằng một chữ thường, chẳng hạn $\vec{a}$, $\vec{x}$ đọc là véc tơ a hoặc véc tơ x và độ dài được kí hiệu:

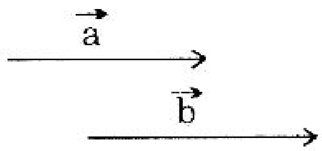
$$|\vec{a}|,\ |\vec{x}| \text{ hoặc } a,\ x.$$

Véc tơ có điểm đầu và cuối trùng nhau được gọi là véc tơ không và kí hiệu $\vec{0}$.

Véc tơ không có độ dài 0, phương và chiều của nó không xác định, tức là phương và chiều của véc tơ không phụ thuộc vào quy định của ta trong một bài toán cụ thể.

Quan hệ của các véc tơ

Quan hệ đồng phương, không đồng phương:

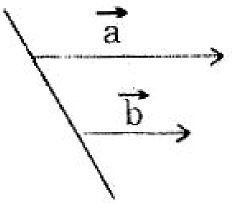


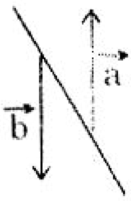
Hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ gọi là đồng phương nếu chúng nằm trên cùng một đường thẳng hoặc trên hai đường thẳng song song và được kí hiệu: $\vec{a} // \vec{b}$.

Nếu hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng cắt nhau thì ta nói hai véc tơ đó không đồng phương và được kí hiệu: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$.

Quan hệ cùng chiều, ngược chiều:

Cho hai véc tơ đồng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



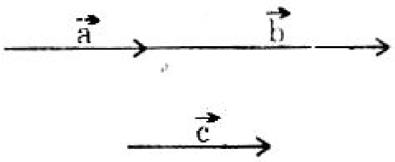


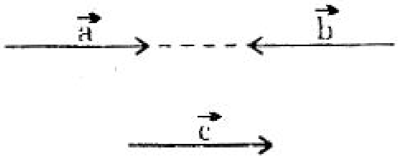
- *Trường hợp $\vec{a}$, $\vec{b}$ nằm trên hai đường thẳng song song:*

Trong trường hợp này, nếu ngọn của hai véc tơ nằm về cùng một phía đối với đường thẳng đi qua gốc của chúng, thì ta nói hai véc tơ đó cùng chiều. Nếu ngọn của chúng nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng đi qua gốc của chúng, thì ta nói hai véc tơ đó ngược chiều.

- *Trường hợp $\vec{a}$, $\vec{b}$ nằm trên cùng một đường thẳng:*

Trong trường hợp này ta xét một véc tơ $\vec{c}$ khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng song song với đường thẳng chứa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nếu $\vec{c}$ cùng chiều với $\vec{a}$ và $\vec{b}$, thì ta nói $\vec{a}$ cùng chiều với $\vec{b}$. Nếu $\vec{c}$ cùng chiều với một trong hai véc tơ và ngược chiều với véc tơ còn lại, thì ta nói $\vec{a}$ ngược chiều với $\vec{b}$.





Kí hiệu hai véc tơ cùng chiều: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ và ngược chiều: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Rõ ràng nếu hai véc tơ cùng nằm trên một đường thẳng, có gốc trùng nhau và ngọn nằm cùng phía đối với gốc, thì hai véc tơ cùng chiều; ngọn nằm hai phía đối với gốc thì hai véc tơ ngược chiều.

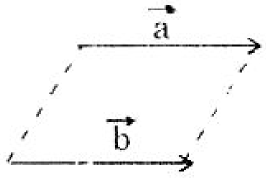
- *Chú ý:*

Khái niệm phương và chiều khác nhau. Phương là đường thẳng, còn chiều là thứ tự trên phương. Ta nói phương thẳng đứng và chiều từ dưới lên hoặc từ trên xuống. Phương nằm ngang và chiều từ trái sang phải hoặc từ phải sang trái. Khi ta nói hai véc tơ cùng chiều hoặc ngược chiều, thì ta hiểu rằng hai véc tơ đó phải đồng phương. Hai véc tơ không đồng phương, thì không có quan hệ về chiều.

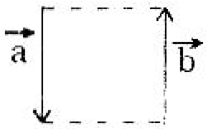
Rõ ràng nếu $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ và $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, thì $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Nếu $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ và $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ thì $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

Để chứng minh tính chất đó, ta xét các trường hợp sau: 3 véc tơ cùng nằm trên một đường thẳng; 3 véc tơ nằm trên 2 đường thẳng song song; 3 véc tơ nằm trên 3 đường thẳng song song.

Quan hệ bằng nhau, đối nhau:



- Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là bằng nhau và được kí hiệu: $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng cùng chiều và cùng độ dài.



- Hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là đối nhau và được kí hiệu: $\vec{a} = -\vec{b}$, nếu chúng ngược chiều và cùng độ dài.

Góc tạo bởi hai véc tơ

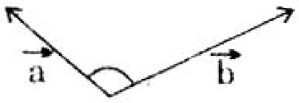
Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (khác $\vec{0}$). Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng gốc, thì góc tạo bởi chúng là góc tạo bởi hai tia sinh bởi hai véc tơ đó. Nếu hai véc tơ không cùng gốc, thì ta chọn một điểm O bất kì làm gốc và dựng các véc tơ.

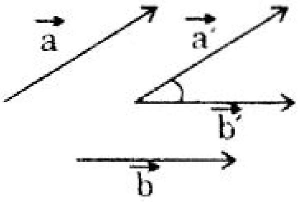
$$\vec{a'} = \vec{a} \quad \text{và} \quad \vec{b'} = \vec{b}$$

Góc hợp bởi các véc tơ $\vec{a'}$ và $\vec{b'}$ được gọi là góc hợp bởi $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Rõ ràng góc đó có độ lớn không phụ thuộc vào cách chọn O. Góc tạo bởi hai véc tơ được kí hiệu: $(\vec{a}, \vec{b})$

Từ định nghĩa ta suy ra:

- Nếu $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{a}$ và $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{b}$, thì $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{a}, \vec{b})$.
- Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$, thì $(-\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, -\vec{b}) = 180^\circ - \alpha$





$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}; \qquad (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

- Nếu $0 < (\vec{a}, \vec{b}) < 180^\circ \Leftrightarrow$ hai véc tơ không đồng phương.

2. DÙNG ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC QUAN HỆ ĐỂ GIẢI TOÁN

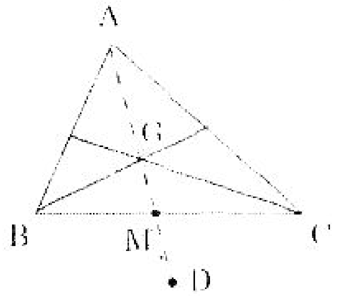
Tổng quan về phương pháp

Khi giải các bài toán hình học có sử dụng đến các kết quả trên, điều quan trọng là phải xem xét vị trí tương đối của các điểm và các đường thẳng, vì các điểm thường gắn liền với các đầu mút véc tơ, còn các đường thẳng gắn với phương của chúng.

Các kiến thức hình học ở các lớp dưới sẽ được vận dụng để giải các bài toán đó. Phương pháp khảo sát vị trí tương đối của điểm và đường thẳng để giải các bài toán véc tơ được gọi là phương pháp hình học.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Kí hiệu D là điểm đối xứng với G qua trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GD}$.

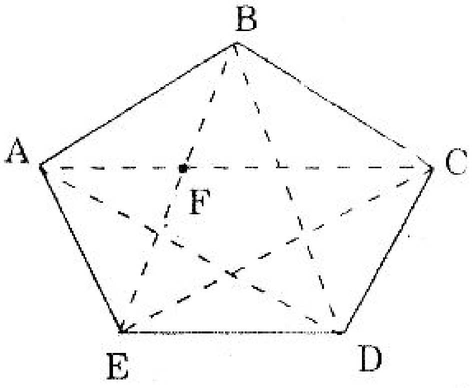


Giải

Theo giả thiết; ta suy ra D và A là hai điểm đối xứng qua G, vì vậy $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GD}$.

Ví dụ 2. Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi F là giao điểm của các đường chéo AC và BE.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$.



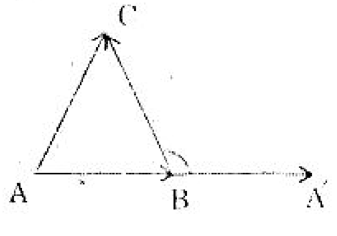
Giải

Theo giả thiết; ngũ giác ABCDE là lồi và do đó F nằm trong ngũ giác. Mặt khác, các đường chéo AC // ED; BE // CD, nên tứ giác CDEF là hình bình hành và từ đó ta suy ra đpcm.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC. Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Giải

Rõ ràng $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng gốc, ta dựng điểm A' đối xứng với A qua B, khi đó ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA'}$



Vì vậy: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

Hoặc ta xét: $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 60^\circ$.

Vì $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

3. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B và dựng 2 tam giác đều ABM và BCN nằm về một phía đối với AC; tam giác đều ACQ nằm khác phía với 2 tam giác đã dựng. Gọi P là giao điểm của AN và CM.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{PB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BQ}$

ii) Tính góc $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM})$.

Hướng dẫn: Hãy chứng minh rằng tứ giác APCQ nội tiếp trong đường tròn và PB là đường phân giác của góc APC

ĐS: ii) 120°

2. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B. Về một phía với AC ta dựng các hình vuông ABMN và BCEF. Về phía còn lại với AC ta dựng hình vuông ACRS. Gọi O là giao các đường chéo hình vuông ACRS; P là giao điểm của các đường thẳng AF và NE.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{PB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PO}$.

ii) Tính góc $(\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{FA})$; $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{FA})$.

Hướng dẫn: Như cách giải bài 1.

ĐS: ii) 135°; 45°.

3. Cho tứ giác lồi ABCD.

i) Kí hiệu M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

ii) Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Hãy xác định quan hệ của hai véc tơ $\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{JN}$.

4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm tam giác, M là điểm đối xứng với O qua BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OM}$.

Hướng dẫn: Xét các trường hợp sau:

i) Tam giác ABC vuông tại A, trường hợp này H trùng với A và O là trung điểm của BC. Ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$.

ii) Tam giác ABC có 3 góc nhọn, khi đó H và O cùng nằm trong tam giác. M đối xứng với O qua BC nằm trong nửa mặt phẳng không chứa O và H với bờ BC. Trường hợp này $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng chiều.

iii) Tam giác ABC có góc A tù. Trường hợp này H và O thuộc hai miền góc đối đỉnh BAC và O nằm trong nửa mặt phẳng không chứa H có bờ BC. Hiển nhiên M đối xứng với O qua BC thuộc nửa mặt phẳng chứa A, H có bờ BC. Vậy $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng chiều.

Việc chứng tỏ độ dài các véc tơ bằng nhau, bạn đọc tự làm.

5. Cho tứ giác ABCD và M, N, E lần lượt là trung điểm các đoạn AD, BD, BC.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}$ // $\overrightarrow{NE}$ là điều kiện cần và đủ để AB // CD.

ii) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NE}$ là điều kiện cần và đủ để ABCD là hình bình hành.

6. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm là điểm O.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$.

ii) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

7. Cho đường tròn O và điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ tới đường tròn O hai tiếp tuyến MA, MB (A và B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OM va AB. Hãy xác định chiều của hai véc tơ $\overrightarrow{MH}$ và $\overrightarrow{OH}$.

Hướng dẫn: Vì tam giác MOA vuông tại A, H là chân đường cao của tam giác hạ từ A, do đó H thuộc đoạn MO; do đó hai véc tơ ngược chiều.

8. Cho tam giác ABC.

i) Kẻ phân giác trong góc A cắt cạnh BC tại D. Xác định chiều của hai véc tơ $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{DC}$.

ii) Kẻ phân giác ngoài của góc A cắt BC tại E. Xác định chiều của hai véc tơ $\overrightarrow{EB}$ và $\overrightarrow{EC}$.

9. Cho tam giác vuông cân ABC ($\hat{C} = 90^\circ$). Trên cạnh AB và về phía ngoài tam giác ta dựng hình vuông ABEF.

i) Tính góc $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$. ii) Tính góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.

iii) Tính góc $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB})$.

ĐS: i) 135°; ii) 90°; iii) 135°.

10. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A', B', C'. Các đoạn thẳng nối tâm đường tròn với các đỉnh A, B, C cắt đường tròn lần lượt tại các điểm A'', B'', C''. Gọi I là giao điểm của các đoạn A'A'' và B'B''. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IC'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{IC''}$.

Hướng dẫn: Hãy chứng minh rằng A'A'', B'B'' và C'C'' là 3 đường phân giác trong của tam giác A'B'C'. Vì I nằm trong tam giác A'B'C' nội tiếp trong đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, nên I là điểm trong của đường tròn đó, đồng thời I thuộc C'C''; do đó I nằm trên dây cung C'C''.

11. AC và BD là hai đường kính vuông góc của một đường tròn. Trên đường tròn đó ta lấy một điểm M (không trùng với các đầu mút đường kính). Gọi N là giao điểm của AM và BD, S là giao điểm của BM và đường thẳng vuông góc với BD tại N.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{DS}$.

ii) Khảo sát chiều của $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{DS}$ theo vị trí của M trên đường tròn.

Hướng dẫn:

i) Hãy chứng tỏ rằng tứ giác MDNS nội tiếp từ đó suy ra S, D, C thẳng hàng.

ii) M thuộc cung $\overset{\frown}{AD}$, thì $\overrightarrow{DC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DS}$. M thuộc một trong 3 cung còn lại, thì $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DS}$.

12. AC và BD là hai đường kính vuông góc của một đường tròn. Trên cung $\overset{\frown}{AD}$ ta lấy một điểm M (khác A và C) và kí hiệu P, R, Q, S lần lượt là giao điểm của AC và MB, AD và MB, AD và MC, BD và MC.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{RS} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ rằng các tứ giác APQM và DSRM nội tiếp để suy ra các cặp véc tơ đồng phương.

13. Hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại S sao cho $\overrightarrow{SB} = -\overrightarrow{SD}$. Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD, T là trung điểm của AC, O là trung điểm của ST. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$.

Hướng dẫn: Ta thấy TM là đường trung bình của tam giác ABC, SN là đường trung bình của tam giác DBC; vì vậy MTNS là hình bình hành mà O là giao các đường chéo.

14. Cho lục giác lồi ABCDEF và các điểm M, P, K, N, Q, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Các đoạn thẳng MN và PQ cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu MN, PQ và KH chia lục giác thành 2 phần có diện tích bằng nhau, thì $\overrightarrow{OK} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OH}$.

15. Cho $\vec{u} \neq \vec{0}$ và đường thẳng (d). Với mỗi điểm M thuộc (d) ta dựng điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Tìm tập hợp điểm M'.

Hướng dẫn: Lấy trên (d) một điểm A cố định và dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, khi đó $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow BM' \,//\, (d)$. Tập hợp M' là một đường thẳng (d') // (d) và (d') đi qua B. Nếu $\vec{u}$ // (d), thì (d') trùng (d).

16. Cho tam giác đều ABC và O là trọng tâm của tam giác. Trên cạnh AB ta lấy điểm P và hạ PQ ⊥ AC, PR ⊥ BC. Gọi G là trọng tâm tam giác PQR. Chứng minh rằng $\overrightarrow{PG} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PO}$.

Hướng dẫn: Gọi R', Q' là giao của OB và PR, OA và PQ. Hãy chứng tỏ tứ giác PQ'R'O là hình bình hành, khi đó G và O cùng thuộc một tia gốc P.

17. M, N lần lượt là trung điểm của hai đáy AB và CD của hình thang ABCD. S là điểm ngoài đoạn BD. E, F là giao của SM và AD; SN và BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} \,//\, \overrightarrow{AB}$.

18. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn và M là một điểm nằm trong tam giác có tính chất là các điểm đối xứng M' và M'' của M qua trung điểm của các cạnh AB và AC thuộc đường tròn.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{M''C}$.

ii) Tính góc tạo bởi $\overrightarrow{M'M''}$ và $\overrightarrow{AH}$.

ĐS: ii) 90°.

19. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, hạ đường cao AH, kẻ phân giác AD (D thuộc đường tròn).

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OD}$

ii) Tam giác ABC có tính chất gì đặc biệt, nếu:

- $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OD}$
- $|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{OD}|$.

20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Các đường phân giác của các góc A, B, C cắt đường tròn O tương ứng tại A', B', C'. Gọi H là giao điểm của các phân giác đó, M là điểm đối xứng với O qua B'C'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$.

Hướng dẫn: Hãy chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác A'B'C'.

4. TÓM LƯỢC VỀ CÁC PHÉP TOÁN VÉC TƠ

Phép cộng 2 véc tơ

Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tổng của các véc tơ đó là một véc tơ $\vec{c}$ được xác định như sau:

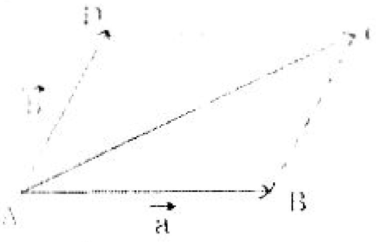
Từ một điểm A bất kì, ta dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Véc tơ $\overrightarrow{AC}$ chính là $\vec{c}$. Quy tắc cộng 2 véc tơ còn được gọi là quy tắc tam giác. Phép cộng 2 véc tơ có các tính chất sau:

$\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$ (luật giao hoán)

$(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$ (luật kết hợp)

$\vec a + \vec 0 = \vec a$

$\vec a + (-\vec a) = \vec 0$



Nếu từ điểm A, ta dựng $\overrightarrow{AB} = \vec a$; $\overrightarrow{AD} = \vec b$ và dựng hình bình hành ABCD, thì véc tơ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec a + \vec b$. Quy tắc lập tổng hai véc tơ đó được gọi là quy tắc hình bình hành.

Phép trừ hai véc tơ

Hiệu của $\vec a$ và $\vec b$ là $\vec c$, nếu $\vec c + \vec b = \vec a$. Từ một điểm A bất kì, ta dựng liên tiếp các véc tơ $\overrightarrow{AB} = \vec a$ và $\overrightarrow{AC} = \vec b$, khi đó $\overrightarrow{CB} = \vec c$ và kí hiệu $\vec c = \vec a - \vec b$. Ta gọi $\vec c$ là véc tơ hiệu.

Phép nhân một véc tơ với một số thực

Cho $\vec a \neq \vec 0$ và số thực $m \neq 0$. Tích của $\vec a$ và m là một véc tơ $\vec b$ thỏa mãn đồng thời các tính chất sau:

$|\vec b| = |m|\,|\vec a|$, $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$ khi $m > 0$ và $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$ khi $m < 0$.

Nếu $\vec a = \vec 0$, thì $\vec b = \vec 0$. Nếu $m = 0$, thì $\vec b = \vec 0$. Ta kí hiệu: $\vec b = m.\vec a$.

Phép nhân một véc tơ với một số thực có các tính chất sau:

$1.\vec a = \vec a$

$m(\vec a + \vec b) = m.\vec a + m.\vec b$ (m là số thực)

$(m + n).\vec a = m.\vec a + n.\vec a$ (m, n là các số thực)

$m.(n.\vec a) = (m.n).\vec a$ (m, n là các số thực)

Hệ quả:

i) $\underbrace{\vec a + \vec a + \ldots + \vec a}_{\text{n lần véc tơ a}} = n.\vec a$

ii) Nếu $\vec a \neq \vec 0$ và $m.\vec a = n.\vec a$, thì $m = n$.

Nếu $m \neq 0$ và $m.\vec a = m.\vec b$, thì $\vec a = \vec b$ (m, n là các số thực).

5. DÙNG CÁC PHÉP TOÁN VÉC TƠ VÀ CÁC HỆ QUẢ ĐỂ GIẢI TOÁN

Việc sử dụng các phép toán riêng biệt hoặc phối hợp các phép toán đó giúp ta giải được một số dạng toán sau đây:

Tìm hệ số véc tơ

Tìm hệ số véc tơ là một trong các dạng toán cơ bản dựa vào định nghĩa và các tính chất của phép nhân một véc tơ với một số thực. Bài toán được phát biểu dưới dạng sau:

Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ (khác $\vec{0}$) cùng phương. Tìm số thực k thỏa mãn điều kiện $\vec{b} = k.\vec{a}$.

Để giải bài toán đó ta cần thực hiện các bước sau:

Lập tỉ số độ dài của b và a: $\frac{b}{a} = |k|$

Xác định chiều của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Khử dấu giá trị tuyệt đối của k.

Ví dụ. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB và AC ta lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$. Ta đặt $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BC}$. Tìm k.

Giải

Từ giả thiết ta suy ra $k = \frac{MN}{BC} = \frac{3}{4}$.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng chiều với $\overrightarrow{BC}$, do đó $k = \frac{3}{4}$.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 1v$) có AB = 3, AC = 4. Gọi H là chân đường cao tam giác kẻ từ A xuống BC. Ta đặt $\overrightarrow{BH} = x.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CH} = y.\overrightarrow{BC}$. Tìm x và y.

2. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 1v$) có AB = 3, AC = 4. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ trên BC và K là chân đường phân giác ngoài của góc đó. Ta đặt $\overrightarrow{BD} = x.\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BK} = y.\overrightarrow{BC}$. Tìm x và y.

3. Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là giao điểm của AM với BD. Ta đặt $\overrightarrow{BN} = x.\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AN} = y.\overrightarrow{AM}$. Tìm x và y.

4. Đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại D, biết AB = c, AC = b và đặt $\overrightarrow{DB} = k.\overrightarrow{DC}$. Hãy tìm giá trị k.

ĐS: $k = -\dfrac{c}{b}$.

5. Cho tam giác ABC có AB = c, AC = b, BC = a và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Từ B ta kẻ đường thẳng song song với AI cắt đường thẳng CI tại K.

i) Đặt $\overrightarrow{IK} = x.\overrightarrow{IC}$. Tìm x. ii) Đặt $\overrightarrow{BK} = y.\overrightarrow{IA}$. Tìm y.

iii) Hãy suy ra rằng: $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

ĐS: $x = -\dfrac{c}{b}$; $y = \dfrac{a}{b}$.

Hướng dẫn: iii) Xuất phát từ: $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KB}$.

6. Cho tam giác ABC và O là một điểm nằm trong tam giác. Kí hiệu S_1, S_2, S_3 là diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB. Gọi D là giao điểm của OA và BC.

i) Đặt $\overrightarrow{OD} = x.\overrightarrow{OA}$. Tìm x theo S_1, S_2, S_3.

ii) Đặt $\overrightarrow{BD} = y.\overrightarrow{BC}$. Tìm y theo S_2, S_3.

iii) Hãy suy ra $S_1.\overrightarrow{OA} + S_2.\overrightarrow{OB} + S_3.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

ĐS: $x = -\dfrac{S_1}{S_2 + S_3}$; $y = \dfrac{S_3}{S_2 + S_3}$.

Hướng dẫn: iii) Xuất phát từ:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + y.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + y.\overrightarrow{OC} - y.\overrightarrow{OB}$$

$$= (1 - y)\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA}.$$

7. Tam giác ABC có AB = AC = b, BC = a. Đường phân giác $\widehat{ACB}$ cắt cạnh AB tại D. Gọi H là trung điểm của BC, M là giao điểm của AH với CD. Ta đặt $\overrightarrow{AH} = x.\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD} = y.\overrightarrow{CM}$. Tìm x và y.

Chứng minh các đẳng thức véc tơ hoặc các tính chất hình học liên quan đến véc tơ

Một đẳng thức mà trong đó các hạng tử là véc tơ được gọi là đẳng thức véc tơ. Mỗi vế của đẳng thức được gọi là biểu thức véc tơ. Để chứng minh sự đúng đắn của một hoặc nhiều đẳng thức ta cần sử dụng một vài đẳng thức quen thuộc sau:

Nếu I là trung điểm của đoạn AB, thì với mọi điểm M ta có:

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$$

Ta gọi đẳng thức đó là công thức trung điểm của một đoạn thẳng.

Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

và với mọi điểm M ta có: $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ (*)

Ta gọi (*) là công thức trọng tâm tam giác.

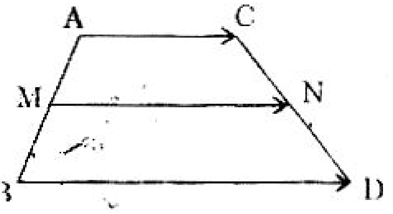
Ví dụ 1. Cho hai đoạn thẳng AB và CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn AB và CD. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Giải

Từ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm tam giác.

i) Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (*)

ii) Chứng minh rằng nếu G là điểm thỏa mãn (*), thì G là trọng tâm tam giác.

iii) Chứng minh rằng với điểm O bất kì, ta có: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Giải

i) Gọi D là điểm đối xứng với G qua trung điểm M của BC, khi đó:

$$\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA} \qquad (*)$$

Mặt khác: $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra điều phải chứng minh.

ii) Từ (*) ta suy ra: $-\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ (***)

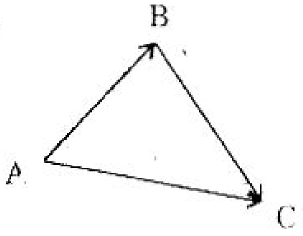
(***) chứng tỏ A, G, M thẳng hàng. AM là trung tuyến của tam giác ABC và G nằm trên đoạn AM và chia đoạn đó theo tỉ số $\frac{2}{1}$, điều đó chứng tỏ G là trọng tâm tam giác.

iii) Từ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$; ta suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 3. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chứng minh rằng:

i) $|\vec{a}| + |\vec{b}| \ge |\vec{a} + \vec{b}|$ ii) $\big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big| \le |\vec{a} - \vec{b}|$.

Giải



Từ điểm A ta dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, khi đó

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}.$$

Ta biết rằng AB + BC ≥ AC, do đó:

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| \ge |\vec{a} + \vec{b}|$$

Từ A ta dựng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, khi đó $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$ và dùng bất đẳng thức

$$AB - AD \le BD \iff \big||\vec{a}| - |\vec{b}|\big| \le |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Rõ ràng dấu bằng trong bất đẳng thức thứ nhất xảy ra, khi $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$.

Trường hợp thứ 2, dấu bằng xảy ra khi A thuộc đoạn BD ⇔ $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Ví dụ 4. Cho tập hợp điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \ge 2)$ và n số thực $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sao cho: $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \ne 0$. Hãy dựng điểm O sao cho:

$$m_1.\overrightarrow{OA_1} + m_2.\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_n.\overrightarrow{OA_n} = \vec{0} \qquad (1)$$

Giải

Giả sử O là điểm đã dựng được, khi đó hệ thức đã cho có thể viết lại:

$$m_1.\overrightarrow{OA_1} + m_2.(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) + m_3(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_3}) + \ldots + m_n.(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_n}) = \vec{0}$$

hay: $(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n)\overrightarrow{OA_1} = m_2\,\overrightarrow{A_2A_1} + m_3\,\overrightarrow{A_3A_1} + \ldots + m_n\,\overrightarrow{A_nA_1}$

Vì $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \ne 0$ do đó ta có:

$$\overrightarrow{A_1O} = k_2\,\overrightarrow{A_1A_2} + k_3\,\overrightarrow{A_1A_3} + \ldots + k_n\,\overrightarrow{A_1A_n} \qquad (*)$$

trong đó: $k_i = \dfrac{m_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$ $(2 \le i \le m)$

Từ hệ thức (*) ta suy ra cách dựng O.

Từ điểm A_1 ta dựng:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k_2\,\overrightarrow{A_1A_2},\quad \overrightarrow{B_1B_2} = k_3\,\overrightarrow{A_1A_3},\quad \ldots,\quad \overrightarrow{B_{n-1}O} = k_n\,\overrightarrow{A_1A_n}$$

Rõ ràng O là điểm duy nhất, vì nếu O' là điểm thỏa mãn (1) ta có:

$$m_1\,\overrightarrow{O'A_1} + m_2\,\overrightarrow{O'A_2} + \ldots + m_n\,\overrightarrow{O'A_n} = \vec{0} \qquad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) các vế tương ứng ta được:

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overrightarrow{O'O} = \vec{0}$$

Vì $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n) \neq 0$, do đó O' và O trùng nhau. Điểm O thỏa mãn điều kiện (1) được gọi là tâm tỉ cự của tập n điểm đã cho. Nếu $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$, thì O được gọi là trọng tâm của tập hợp điểm. Nếu tập hợp điểm đã cho gồm 3 điểm không thẳng hàng và $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, thì O là trọng tâm của tam giác lập bởi 3 điểm đó.

Ví dụ 5. Cho 2 véc tơ $\vec{U}, \vec{V}$ khác $\vec{0}$ và hợp với nhau một góc α. Chứng minh rằng:

i) $\alpha < 90^\circ \Leftrightarrow |\vec{U} + \vec{V}| > |\vec{U} - \vec{V}|$

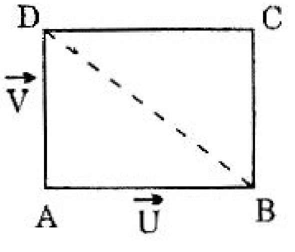
ii) $\alpha > 90^\circ \Leftrightarrow |\vec{U} - \vec{V}| > |\vec{U} + \vec{V}|$

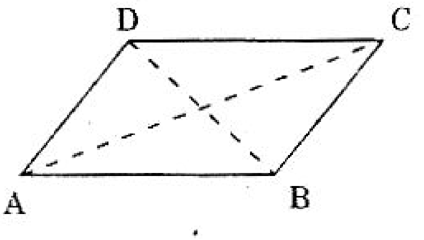
iii) $\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow |\vec{U} - \vec{V}| = |\vec{U} + \vec{V}|$.

Giải

Dựng hình bình hành ABCD sao cho: $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{V}$.

Khi đó: $\vec{U} + \vec{V} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{U} - \vec{V} = \overrightarrow{DB}$. Theo tính chất hình bình hành ta suy ra các kết quả i), ii), iii). Rõ ràng trong trường hợp i) ta có bất đẳng thức: $|\vec{U} + \vec{V}| > \text{Max}\left\{|\vec{U}|, |\vec{V}|\right\}$.





CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

2. Cho tứ giác ABCD và điểm G thỏa mãn hệ thức:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\quad(*),$$

được gọi là trọng tâm của tứ giác đó. Chứng minh rằng G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm 2 đường chéo tứ giác.

Hướng dẫn: Từ (*) ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD})\quad\Leftrightarrow\quad 2\overrightarrow{GM}=-2\overrightarrow{GN}$$

M và N là trung điểm của AC và BD.

3. Cho tứ giác ABCD và các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Tính tổng: $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{DM}$.

ĐS: $\vec{0}$.

4. Kí hiệu O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Hướng dẫn: Hãy xét các trường hợp sau đây:

i) Tam giác ABC vuông tại A (hoặc B...), trực tâm H là A, O là trung điểm của BC.

ii) Tam giác đó có 3 góc nhọn, trực tâm H nằm trong tam giác cùng với tâm O.

iii) Tam giác đó có góc A tù, trực tâm H và O nằm ngoài tam giác và khác phía với BC.

5. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

(O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác), thì tam giác đó đều.

Hướng dẫn: Dùng kết quả bài 4.

6. Chứng minh rằng nếu trực tâm H của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác đó đều.

Hướng dẫn: Dùng kết quả bài 4.

7. Cho 2 tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$.

Chứng minh rằng hai tam giác có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Xuất phát từ

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{GA_1}-\overrightarrow{GA}\quad\text{và}\quad\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

8. Cho hai tứ giác ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng hai tứ giác có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 7.

9. Trên các đường thẳng BC, CA, AB chứa 3 cạnh tam giác ABC ta lấy các điểm A', B', C' và đặt $\overrightarrow{C'A_1} = k.\overrightarrow{C'A}$, $\overrightarrow{A'B_1} = k.\overrightarrow{A'B}$, $\overrightarrow{B'C_1} = k\overrightarrow{B'C}$ (k là số thực khác 0 cho trước); $\overrightarrow{B'A_2} = k.\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'B_2} = k.\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{A'C_2} = k\overrightarrow{A'C}$.

Chứng minh rằng hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn: Gọi G_1 là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

Từ $\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} =$

$$= \overrightarrow{G_1C'} + \overrightarrow{C'A_1} + \overrightarrow{G_1A'} + \overrightarrow{A'B_1} + \overrightarrow{G_1B'} + \overrightarrow{B'C_1}$$

$$= (\overrightarrow{G_1A'} + \overrightarrow{G_1B'} + \overrightarrow{G_1C'}) + (\overrightarrow{A'B_1} + \overrightarrow{B'C_1} + \overrightarrow{C'A_1})$$

$$= \overrightarrow{G_1A_2} + \overrightarrow{G_1B_2} + \overrightarrow{G_1C_2} + (\overrightarrow{A_2B'} + \overrightarrow{B_2C'} + \overrightarrow{C_2A'}) + k(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{C'A})$$

10. Cho một đa giác đều $A_1A_2A_3...A_n$ nội tiếp trong đường tròn O. Chứng minh rằng O là trọng tâm của đa giác.

Hướng dẫn: Hãy xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ. Với $n = 2k$ các điểm A_1 và A_k; A_2 và A_{k+1}; A_3 và A_{k+2} ... đối xứng qua O. Với $n = 2k - 1$ ta xét đường kính OA_1, khi đó các cặp đỉnh A_2 và A_{2k-1}; A_3 và A_{2k-2} ... đối xứng qua OA_1; cho nên:

$$\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_{2k-1}} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_{2k-2}} + ...\overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_{k+1}}$$

là véc tơ đồng phương với $\overrightarrow{OA_1}$.

Bây giờ ta xét đường kính OA_2, khi đó các cặp điểm A_1 và A_3; A_{2k-1} và A_4; A_{2k-2} và A_5 ... đối xứng qua đường kính OA_2; cho nên:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_{2k-1}} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_{2k-2}} + \overrightarrow{OA_5} + ...\overrightarrow{OA_{k-1}} + \overrightarrow{OA_{k+1}}$$

là véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{OA_2}$.

Tóm lại: $\vec{u} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + ... + \overrightarrow{OA_{2k-1}}$ là véc tơ vừa cùng phương với $\overrightarrow{OA_1}$ vừa cùng phương với $\overrightarrow{OA_2}$; mà hai véc tơ đó khác $\vec{0}$. Điều này chỉ xảy ra khi $\vec{u} = \vec{0}$.

11. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Hướng dẫn: Sử dụng lại kết quả của bài 4 (trang 23) hoặc bài 4 (trang 10).

12. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng nếu: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$ thì ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn: Từ giả thiết, ta suy ra: $\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1} = \vec{0}$.

Ta dựng: $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{CB_1} \Rightarrow \overrightarrow{A_2B} = \overrightarrow{AC_1}$; hệ thức này chứng tỏ A_2 thuộc cạnh BC:

$$\Delta A_1A_2B \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k.$$

Trong đó: a = BC, b = AC, c = AB, x = BA_1, y = CB_1 = A_1A_2, z = AC_1 = A_2B. Từ đó ta suy ra: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{1}{2} = k$ hay các tiếp điểm là trung điểm các cạnh tam giác.

13. Cho tam giác ABC và 3 véc tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ lần lượt nằm trên BC, CA, AB và thỏa mãn điều kiện: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng $\frac{u}{BC} = \frac{v}{CA} = \frac{w}{AB}$; trong đó u, v, w là độ dài của 3 véc tơ.

Hướng dẫn: Dựng $\overrightarrow{B'C'} = \vec{u}$; $\overrightarrow{C'A'} = \vec{v}$; $\overrightarrow{A'B'} = \vec{w}$;

khi đó $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (vì 3 cạnh của hai tam giác song song).

14. MN là đường trung bình của tam giác ABC có phương song song với BC, P là trung điểm của MN, O là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}.$$

15. Cho góc xOy nhỏ hơn 180° và các véc tơ a, b nằm trên 2 cạnh góc có độ dài bằng nhau và bằng 1, cùng chiều với các tia Ox, Oy. Hãy lập véc tơ chỉ phương của tia phân giác trong và phân giác ngoài của góc đó theo các véc tơ đơn vị của các tia Ox và Oy.

Hướng dẫn: Coi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 2 véc tơ đơn vị của tia Ox và Oy có chung gốc O. Ta lấy các điểm A và B trên 2 tia sao cho:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}.$$

Gọi M là trung điểm của AB, khi đó: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ là véc tơ chỉ phương của tia phân giác trong;

$\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ là véc tơ chỉ phương của tia phân giác ngoài.

16. Chứng minh rằng nếu hình bình hành ABCD thỏa mãn điều kiện $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \perp (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$ thì nó là một hình thoi.

17. Cho tam giác ABC có các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Lập công thức véc tơ chỉ phương của các đường phân giác của các góc trong tam giác đó.

Hướng dẫn: Ta xét góc A. Kí hiệu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là các véc tơ đơn vị trên hai tia AB và AC. Ta có: $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}$; $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$

Theo kết quả của bài 15, ta suy ra véc tơ chỉ phương của đường phân giác góc A là $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$.

18. Tứ giác lồi ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh rằng:

nếu $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{a} + \dfrac{\overrightarrow{AD}}{d} \parallel \overrightarrow{AC}$ và $\dfrac{\overrightarrow{CB}}{b} + \dfrac{\overrightarrow{CD}}{c} \parallel \overrightarrow{AC}$ thì: a = d và b = c.

19. Kí hiệu A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trong một hình tứ giác ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho

$$\overrightarrow{AA_1} = k\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{BB_1} = k\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{CC_1} = k\overrightarrow{CD},\quad \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{DA}.$$

Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{0}$, thì tứ giác đó là hình vuông.

Hướng dẫn: Từ A_1 ta dựng $\overrightarrow{A_1B'} = \overrightarrow{BB_1}$ và từ B' ta dựng $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CC_1}$;

khi đó: $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'A} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{DD_1}$

$\Rightarrow$ C' thuộc cạnh DA.

Hai tứ giác ABCD và $AA_1B'C'$ đồng dạng và tỉ số đồng dạng bằng 2. Điều đó chứng tỏ A_1, B_1, C_1, D_1 là trung điểm của các cạnh tứ giác. (2 tứ giác có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ, thì đồng dạng).

20. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C và 3 số thực a, b, c. Với mỗi điểm M ta đặt $\vec{U} = a\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} + c.\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng nếu a + b + c = 0 thì $\vec{U}$ có độ dài không phụ thuộc vào vị trí của M.

Hướng dẫn: Từ hệ thức của $\vec{U}$, ta suy ra:

$$\vec{U} = (a+b+c)\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC} = b\,\overrightarrow{AB} + c\,\overrightarrow{AC}$$

Đây là một véc tơ có độ dài không đổi.

21. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác đó. Gọi A', B', C' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ O xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$, thì tồn tại tam giác mà độ dài ba cạnh bằng OA', OB', OC' và tam giác đó đồng dạng với ABC.

Hướng dẫn: Dựng $\overrightarrow{OC''} = -\overrightarrow{OC'}$, khi đó:

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C''} + \overrightarrow{C''O} = \vec{0} \quad (*) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{A'C''} = \overrightarrow{OB'}$$

và (*) chứng tỏ tồn tại tam giác mà ba cạnh bằng OA, OB, OC. Vì tam giác OA'C'' có các cạnh tương ứng vuông góc với ba cạnh tam giác ABC, nên các góc của hai tam giác bằng nhau.

22. Cho tứ giác lồi ABCD và O là điểm trên đường chéo AC. Kí hiệu S_a và S_c lần lượt là diện tích các tứ giác OBCD và OBAD.

Chứng minh rằng: $S_a\,\overrightarrow{OA} + S_b\,\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ (*)

Từ (*) hãy suy ra:

i) $$S_1(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + S_2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + S_3(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) + S_1(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0} \qquad (**)$$

trong đó O là giao các đường chéo tứ giác; S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OCD, ODA, OAB.

ii) Nếu giao điểm O của các đường chéo là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác, thì (**) có dạng:

$$b(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + c(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + d(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) + a(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$$

trong đó: b = BC, c = CD, d = DA, a = AB.

23. Cho hai tam giác ABC và A_1BC. Gọi I và I_1 lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp của hai tam giác đó. Chứng minh rằng: $I_1I < A_1A$.

Hướng dẫn: Đặt a = BC, b = AC, c = AB, $b_1 = A_1C$, $c_1 = A_1B$ và xuất phát từ các hệ thức:

$$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \qquad (*)$$

và $$a\,\overrightarrow{I_1A_1} + b_1\,\overrightarrow{I_1B} + c_1\,\overrightarrow{I_1C} = \vec{0} \qquad (**)$$

Trừ (*) với (**) và rút gọn ta được:

$$2p\,\overrightarrow{II_1} + a\,\overrightarrow{A_1A} + (b - b_1)\,\overrightarrow{I_1B} + (c - c_1)\,\overrightarrow{I_1C} = \vec{0}$$

hay $2p\,\overrightarrow{I_1I} = a\,\overrightarrow{A_1A} + (b - b_1)\,\overrightarrow{I_1B} + (c - c_1)\,\overrightarrow{I_1C}$ $\quad (2p = a + b + c)$

$$\Rightarrow \quad 2pI_1I < a.A_1A + |b - b_1|I_1B + |c - c_1|I_1C$$

$$< aA_1A + A_1A.I_1B + A_1A.I_1C$$

$$< (a + b_1 + c_1)A_1A = 2p_1\,A_1A \qquad (***)$$

$(I_1B < c_1;\ I_1C < b_1;\ |b - b_1| < A_1A;\ |c - c_1| < A_1A);\quad 2p_1 = a + b_1 + c_1.$

Tương tự ta có: $2p_1I_1I < 2pA_1A$ $\quad (****)$

Nếu $p > p_1$, thì từ (***) ta suy ra dpcm.

Nếu $p_1 > p$, thì từ (****) ta suy ra điều cần chứng minh.

24. Cho hai véc tơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ hợp với nhau một góc α.

i) Chứng minh rằng nếu $\alpha < 60^\circ$, thì: $|\vec{a} - \vec{b}| < 1$. Hãy chứng tỏ kết quả đó vẫn đúng trong trường hợp các véc tơ đã cho có độ dài không lớn hơn 1.

ii) Chứng minh rằng nếu $\alpha \geq 60^\circ$, thì: $|\vec{a} - \vec{b}| \geq 1$, $\quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq \sqrt{3}$.

iii) Chứng minh rằng nếu $\alpha \geq 90^\circ$, thì: $|\vec{a} - \vec{b}| \geq \sqrt{2}$, $\quad |\vec{a} + \vec{b}| < \sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

i) Dựng tam giác cân ABC sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ và dùng tính chất trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.

ii) Hạ $AH \perp BC$ $\Rightarrow$ $BC = 2AB.\sin\dfrac{\alpha}{2} \geq 1$.

25. Cho ba véc tơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Chứng minh rằng tồn tại hai trong ba véc tơ đó sao cho tổng hoặc hiệu của chúng không lớn hơn 1.

Hướng dẫn: Xét 6 véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$ được đặt từ một điểm O, khi đó tồn tại một cặp véc tơ hợp với nhau một góc không lớn hơn 60° và dùng kết quả của bài 24.

26. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác đó. Kí hiệu A', B', C' là hình chiếu tương ứng của O trên BC, CA, AB, biết rằng:

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \vec{0}.$$

Chứng minh rằng tồn tại một tam giác mà ba cạnh bằng $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$

đồng dạng với tam giác ABC và tỉ số đồng dạng bằng $\frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$; trong đó a, b, c, S lần lượt là độ dài ba cạnh tam giác và diện tích tam giác đó.

Hướng dẫn: Hãy dựng $\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{OB'}$, khi đó $\overrightarrow{A_1O} = \overrightarrow{OC'}$. Tam giác $OA'A_1$ là tam giác thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $x = OA'$, $y = OB'$, $z = OC'$; ta có: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$.

Mặt khác ta có: $xa + yb + zc = 2S \Rightarrow k = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}$.

27. Cho hai tam giác ABC và A'B'C', biết rằng bên trong tam giác ABC tồn tại điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{A'B'}$. Chứng minh rằng O là trọng tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn: Hãy nghiệm lại $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

28. Trên nửa đường tròn đường kính PQ = 2 ta lấy ba điểm A, B, C. Gọi O là tâm của nửa đường tròn. Chứng minh rằng: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| \geq 1$.

Hướng dẫn: Có thể coi B thuộc cung $\overparen{AB}$ và đặt $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, vì tam giác OAC cân nên OD là tia phân giác của góc $\widehat{AOC}$ và do đó góc $\widehat{AOD}$, $\widehat{COD}$ nhọn. Điểm B phải thuộc một trong hai góc đó, nên $\widehat{BOD}$ nhọn $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| > OB = 1$.

29. Tam giác ABC có AB = c, BC = a, AC = b. Gọi G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng nếu $a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, thì a = b = c.

Hướng dẫn: Ta viết lại:

$$(a-c)\overrightarrow{GA} + (b-c)\overrightarrow{GB} + c(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-c)\overrightarrow{GA} = (c-b)\overrightarrow{GB}.$$

6. DÙNG TÂM TỈ CỰ ĐỂ GIẢI TOÁN

Định nghĩa

Cho tập hợp n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n > 1)$ và n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \neq 0$. Bao giờ cũng dựng được duy nhất một điểm M sao cho:

$$x_1.\overrightarrow{MA_1} + x_2.\overrightarrow{MA_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0} \qquad (*)$$

Ta gọi M là tâm tỉ cự của tập hợp điểm đã cho. Các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được gọi là các tỉ cự của M đối với $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (xem ví dụ 4 trong phần các phép toán véc tơ).

Phương pháp

Nếu trong một bài toán hình học mà giả thiết hoặc kết luận của nó chứa biểu thức dạng (*) hoặc liên quan đến biểu thức dạng (*), thì điều đó gợi cho ta dùng tâm tỉ cự trong (*) để rút gọn (*) về dạng đơn giản nhất và tiến hành giải bài toán trong trường hợp đó. Phần lớn những bài toán như tìm tập hợp điểm, khảo sát độ dài các véc tơ, khảo sát tính thẳng hàng của 3 điểm... ta thường sử dụng tâm tỉ cự để giải chúng.

Dựng (hoặc tìm) điểm

Để dựng điểm M thỏa mãn điều kiện (*) ta cần rút gọn vế trái của (*) về một biểu thức chỉ còn một véc tơ phụ thuộc vào M. Sau đó sử dụng quy tắc ba điểm hoặc quy tắc bình hành hoặc quy tắc nhân một véc tơ với một số thực.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B. Dựng điểm M sao cho: $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Giải

Từ $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, ta suy ra $5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$. Đẳng thức đó chứng tỏ M là điểm thuộc đoạn AB và chia đoạn thẳng đó theo tỉ số AM : AB = 3 : 5.

Hiển nhiên M là điểm duy nhất, vì nếu M' là điểm thỏa mãn

$$2\overrightarrow{M'A} + 3\overrightarrow{M'B} = \vec{0}\text{, thì ta suy ra } 5\overrightarrow{M'M} = \vec{0} \text{ hay } \overrightarrow{M'M} = \vec{0}.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Giải

Từ giả thiết ta suy ra: $6\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \quad 6\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Từ đẳng thức đó ta tìm M như sau:

Ta dựng $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$

M là đỉnh của một hình bình hành dựng trên các véc tơ $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{AC'}$. Hiển nhiên M là điểm duy nhất không phụ thuộc vào cách rút gọn biểu thức.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}$.

2. Cho hình bình hành ABCD. Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

   Hướng dẫn: Có vô số điểm M.

3. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$$

4. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Hãy dựng điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

   Hướng dẫn: Gọi G là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, H là trung điểm của DE. Từ giả thiết ta suy ra: $3\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OH}$.

5. Cho ngũ giác đều ABCDE. Hãy dựng điểm G sao cho:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = 0$$

   Hướng dẫn: Giả sử G là điểm đã dựng được, khi đó:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GE}$$

   Gọi M và N là trung điểm của các dây cung BC và AD, ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}; \quad \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} \quad \Rightarrow \quad 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = -\overrightarrow{GE}$$

   Gọi K là trung điểm của đoạn MN, ta có:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GK} \quad \Rightarrow \quad 4\overrightarrow{GK} = -\overrightarrow{GE} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GK} \,//\, \overrightarrow{GE}$$

   ⇒ G thuộc đoạn KE mà KE đi qua M, N; do đó G thuộc đường kính của đường tròn ngoại tiếp ngũ giác mà đầu mút là E. Lập luận tương tự, G thuộc đường kính của đường tròn ngoại tiếp ngũ giác mà đầu mút là A. Điều đó chứng tỏ G trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp ngũ giác.

6. Cho tứ giác ABCD. Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

Tìm tập hợp điểm

Có hai bài toán tìm tập hợp điểm thường gặp:

Bài toán 1. Cho các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và $n + 1$ số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n, k$. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$|x_1\overrightarrow{MA_1} + x_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{MA_n}| = k.$$

Để giải bài toán trên ta cần thực hiện các bước sau:

- Rút gọn biểu thức véc tơ trong dấu độ dài về một véc tơ phụ thuộc M.
- Tìm điểm cố định có liên quan đến M.

Ví dụ. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\right| = \left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|.$$

Giải

Nhìn vào vế trái của giả thiết ta thấy tồn tại duy nhất điểm M_0 là tâm tỉ cự của 4 điểm đã cho với các tỉ cự tương ứng là 1, 2, 3, 4. Ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\right| = 10.M_0M.$$

Vế phải: $\left|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2AD$ (D là điểm cố định)

Từ các kết quả trên ta suy ra $5M_0M = AD$ và điều này cho thấy:

- Nếu AD = 0, thì tập M là điểm M_0.
- Nếu AD ≠ 0, thì tập M là đường tròn tâm M_0, bán kính $R = \frac{AD}{5}$.

Bài toán 2. Cho các điểm A_1, A_2, ..., A_n và n số dương x_1, x_2, ..., x_n. Với điểm M thuộc một đường thẳng (d) (hoặc đường tròn (O) hoặc một hình F nào đó), ta xác định điểm N sao cho:

$$\left|x_1\overrightarrow{MA_1} + x_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + x_n\overrightarrow{MA_n}\right| = \overrightarrow{MN}$$

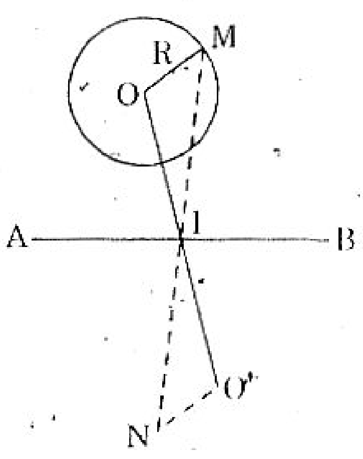
Tìm tập hợp N khi M thay đổi trên (d) (hoặc đường tròn (O) hoặc một hình F nào đó).

Để giải bài toán trên ta cần thực hiện các bước sau:

- Rút gọn biểu thức véc tơ ở vế trái về một véc tơ phụ thuộc M.
- Chỉ ra tính chất của M với N.

Ví dụ. Cho hai điểm A, B và đường tròn (O). Với mỗi điểm M thuộc (O) ta xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

Tìm tập hợp N khi M thay đổi trên (O).



Giải

Gọi I là trung điểm của đoạn AB, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IN}$$

Gọi O' là điểm đối xứng với O qua I. Vì I và O cố định, do đó O' cố định. Hiển nhiên O'N = OM = R không đổi (R là bán kính đường tròn (O)). Tập hợp N là một đường tròn tâm O', bán kính R.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

i) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = k$ (k là số dương cho trước).

ii) $|a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB}| = k$ $(a > 0, b > 0)$.

ĐS: i) Là đường tròn tâm I, bán kính R = 0,5k.

ii) Là đường tròn tâm M_1, bán kính $R = \dfrac{k}{a+b}$; trong đó:

$$a.\overrightarrow{M_1A} + b.\overrightarrow{M_1B} = \vec{0}$$

2. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|.$$

Hướng dẫn: Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức:

$$3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \qquad \text{(I là tâm tỉ cự của ba điểm)}$$

Khi đó I được xác định duy nhất và không phụ thuộc vào M.

Ta có: $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2MI$;

$$|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| = AB \qquad \Rightarrow IM = \frac{AB}{2} \text{ không đổi.}$$

3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}| = |b\overrightarrow{MA} + c\overrightarrow{MB} + a\overrightarrow{MC}| \quad (a + b + c \neq 0).$$

Hướng dẫn: Kí hiệu M_1 là điểm thỏa mãn điều kiện:

$$a\overrightarrow{M_1A} + b\overrightarrow{M_1B} + c\overrightarrow{M_1C} = \vec{0}$$

và M_2 là điểm thỏa mãn điều kiện:

$$b\overrightarrow{M_2A} + c\overrightarrow{M_2B} + a\overrightarrow{M_2C} = \vec{0}$$

Từ điều kiện đã cho ta suy ra $M_1M = M_2M$ và vì vậy tập hợp M là đường trung trực của đoạn M_1M_2, nếu $M_1 \neq M_2$; cả mặt phẳng, nếu $M_1 \equiv M_2$.

4. Cho đoạn thẳng AB và đường thẳng (d). Với mỗi điểm M thuộc (d) ta xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$. Tìm tập hợp N khi M biến thiên trên (d).

Hướng dẫn: Lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, hiển nhiên I cố định. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MI} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IN} = -2\overrightarrow{IM}$$

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ I xuống (d). H' là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IH'} = -2\overrightarrow{IH}$, khi đó H' cố định và H'N // (d). Tập hợp N là đường thẳng đi qua H' và song song hoặc trùng với (d).

5. Cho tứ giác ABCD và đường tròn (O). Với mỗi điểm M thuộc (O) ta xác định điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.. Tìm tập hợp điểm N khi M biến thiên trên (O).

6. Cho tam giác ABC và số k thuộc đoạn [0; 1]. Tìm tập hợp điểm M sao cho $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k.\overrightarrow{BC}$ khi k thay đổi trên đoạn [0; 1].

Hướng dẫn: Ta có $2\overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{BC}$. Điều đó chứng tỏ M thuộc cạnh AD của hình thang ABCD (AD // BC và 2AD = BC).

Bài toán cực trị về độ dài véc tơ

Cho các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và n số dương $x_1, x_2, ..., x_n$. Đường thẳng (d) (hoặc đường tròn (O) hoặc một hình F nào đó). Tìm trên (d) (hoặc đường tròn (O) hoặc một hình F nào đó) để:

$$\left|x_1\overrightarrow{MA_1} + x_2\overrightarrow{MA_2} + ... + x_n\overrightarrow{MA_n}\right| \text{ min hoặc max}$$

Muốn vậy, ta cần rút gọn biểu thức véc tơ trong dấu độ dài về một véc tơ phụ thuộc M. Sau đó, ta tìm min hoặc max độ dài véc tơ đó.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC và đường thẳng (d). Hãy tìm trên (d) điểm M sao cho: $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác, khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right|.$$

Bài toán được đưa về tìm M trên (d) sao cho MG nhỏ nhất.

2. Cho tứ giác ABCD và đường thẳng (d). Hãy tìm điểm M trên (d) sao cho:

i) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất,

ii) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất,

iii) $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất,

iv) $|a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB}| + |c.\overrightarrow{MC} + d.\overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất, trong đó: $a + b = c + d \neq 0$.

Hướng dẫn: i) Gọi G là trọng tâm của tứ giác, khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

ii) Gọi P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MP}\ ; \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MQ}$$

Bài toán được đưa về tìm M trên (d) sao cho MP + MQ nhỏ nhất. Ta xét các trường hợp:

- (d) đi qua P và Q. Trường hợp này mọi điểm M thuộc đoạn PQ đều thích hợp.
- P và Q nằm về 2 phía với (d). Trường hợp này M là giao của PQ và (d).
- P và Q cùng phía với (d). Trường hợp này M là giao của P'Q và (d), trong đó P' đối xứng với P qua (d).

3. Cho đường tròn (O, R) và dây cung AB. Hãy tìm điểm M trên đường tròn đó sao cho:

i) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất

ii) $|a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất $(a > 0\ ,\ b > 0)$.

ĐS: i) Nếu AB là đường kính, thì $2MO = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ không đổi. Nếu AB là dây cung bé hơn đường kính, thì các giá trị đó đạt được khi M trùng với các đầu mút đường kính vuông góc với AB.

ii) Gọi M_0 là tâm tỉ cự của A, B với các tỉ cự a, b.

Ta có: $|a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB}| = (a + b)M_0M$.

Bài toán đưa về tìm M trên (O, R) sao cho M_0M min.

4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Hãy tìm trên đường tròn điểm M sao cho $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất; lớn nhất.

Hướng dẫn: Gọi G là điểm có tính chất: $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (G là tâm tỉ cự).

Bài toán được đưa về tìm M trên đường tròn sao cho MG nhỏ nhất; lớn nhất.

Khảo sát tính chất của một véc tơ hoặc một điểm được lập ra từ một số véc tơ hoặc một tập hợp điểm cho trước

Ví dụ 1. Cho ba điểm phân biệt A, B, C và ba số thực a, b, c $(a + b + c \neq 0)$. Với mỗi điểm M ta đặt: $\vec{U} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$.

Ta xét các điểm N khác M sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{U}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Giải

Gọi M_0 là tâm tỉ cự của hệ 3 điểm đã cho với các tỉ cự tương ứng a, b, c; do đó M_0 là điểm cố định khi M, N thay đổi. Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = a.(\overrightarrow{M_0A} - \overrightarrow{M_0M}) + b.(\overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0M}) + c.(\overrightarrow{M_0C} - \overrightarrow{M_0M})$$

$$= -(a + b + c)\overrightarrow{M_0M}$$

Chứng tỏ ba điểm M_0, M, N thẳng hàng và MN đi qua điểm cố định M_0.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác đó. Xác định tính chất của điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} = \vec{0} \qquad (1)$$

Giải

Từ (1) ta suy ra: $\overrightarrow{HA} = -(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -2\overrightarrow{OM}$ (M là trung điểm của BC).

Điều đó chứng tỏ OM là đường trung trực của BC. Tương tự O thuộc đường trung trực của AC và vì vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Xác định tính chất của điểm I sao cho:

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \qquad (1)$$

ĐS: I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O. Hãy xác định tính chất của điểm H thỏa mãn điều kiện sau:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OH} = \vec{0}$$

ĐS: H là điểm chung của 4 đường thẳng đi qua trung điểm 4 cạnh tứ giác và vuông góc với cạnh đối diện.

3. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A}$ = 1v) có AB = 1, AC = 2. Với mỗi điểm M ta thành lập véc tơ $\overrightarrow{U} = 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$.

Chứng minh rằng $|\overrightarrow{U}|$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M và tính độ dài đó.

Hướng dẫn: Ta viết $\overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$

$$|\overrightarrow{U}| = \sqrt{4AB^2 + 25AC^2}$$

4. Cho tam giác đều ABC cạnh AB = 1. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn EF ta lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MF} = -2\overrightarrow{ME}$. Ta xác định điểm N theo công thức sau:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$$

Tính độ dài véc tơ $\overrightarrow{MN}$.

Điều kiện tồn tại một tam giác mà ba cạnh bằng và song song với ba đoạn thẳng cho trước không song song với một phương

Giả sử a, b, c là ba đoạn thẳng không song song với một đường thẳng. Để chứng minh tồn tại một tam giác có các cạnh song song và bằng các đoạn thẳng đó ta cần thực hiện các bước sau:

- Mỗi đoạn a, b, c ứng với một véc tơ.
- Chứng minh tổng ba véc tơ đó bằng véc tơ 0.

Ví dụ. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh bằng và song song với các đoạn GA, GB, GC.

Giải

Ta xét các véc tơ $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$. Rõ ràng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Mặt khác các đường thẳng GA, GB, GC không trùng nhau. Vì vậy ta suy ra điều cần chứng minh.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh bằng và song song với các đoạn CM, AN, BK.
2. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB ta lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, C_1 sao cho trọng tâm hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ trùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh bằng và song song với các đoạn AA_1, BB_1, CC_1.
3. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB về phía ngoài tam giác ta dựng các hình vuông BCPQ, CAKH, ABMN. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh bằng và song song với các đoạn MQ, PH, KN.

7. TÓM LƯỢC ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHƯƠNG CỦA HAI VÉC TƠ

Phát biểu điều kiện đồng phương của hai véc tơ

Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Điều kiện cần và đủ để hai véc tơ đó đồng phương là tồn tại một số thực x sao cho $\vec{b} = x\vec{a}$.

Hệ quả

i) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phương và $x.\vec{a} + y.\vec{b} = \vec{0}$, thì $x = y = 0$.

ii) Giả sử $\vec{a}$, $\vec{b}$ không đồng phương; khi đó:

$$x.\vec{a} + y.\vec{b} = x'.\vec{a} + y'.\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad x = x' \quad \text{và} \quad y = y'$$

iii) Véc tơ không luôn đồng phương với mọi véc tơ khác không.

Phân tích một véc tơ theo hai véc tơ không đồng phương

Cho hai véc tơ không đồng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{u}$ là một véc tơ bất kì. Nếu tồn tại các số thực x và y sao cho $\vec{u} = x.\vec{a} + y.\vec{b}$ thì ta nói $\vec{u}$ đã được phân tích theo các véc tơ đã cho. Cặp véc tơ đã cho được gọi là cơ sở của $\vec{u}$. Cặp số thực (x; y) là tọa độ của $\vec{u}$. Dùng qui tắc hình bình hành, ta chứng minh được rằng: mọi véc tơ bất kì luôn phân tích được theo một cơ sở đã chọn và phân tích đó là duy nhất.

Phân tích véc tơ rất cần trong việc giải toán bằng véc tơ vì nhờ đó mọi véc tơ khác có trong bài toán đang xét đều được biểu diễn qua cơ sở và việc rút gọn các biểu thức véc tơ phức tạp được đưa về việc rút gọn các biểu thức số.

8. DÙNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHƯƠNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Bằng cách dùng điều kiện đồng phương của hai véc tơ, ta có thể giải được một số dạng toán hình học liên quan đến các tính chất thẳng hàng của 3 điểm, tính đồng quy của 3 đường thẳng, tính song song của 2 đường thẳng, các đẳng thức và bất đẳng thức hình học, họ đường thẳng đi qua một điểm cố định, tìm tập hợp điểm...

Phương pháp

i) Chọn cơ sở là việc làm đầu tiên không thể thiếu được. Ta thường chọn những cặp véc tơ có độ dài xác định và góc tạo bởi chúng đã biết.

ii) Biểu thị các yếu tố cần xét có trong bài toán bằng véc tơ (nếu các yếu tố đó được cho bởi điểm hoặc đường thẳng hoặc đoạn thẳng... tức là các yếu tố đang xét không phải là véc tơ).

iii) Hãy phân tích các véc tơ đang xét qua cơ sở đã chọn và dùng điều kiện đồng phương.

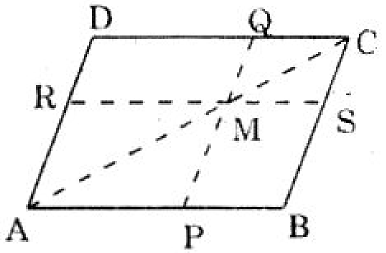
Ta xét các ví dụ sau:

Khảo sát tính thẳng hàng của ba điểm

Ví dụ 1. Bên trong một hình bình hành ABCD ta lấy một điểm M. Đường thẳng song song với AB và qua M cắt các cạnh AD và BC tương ứng tại R và S. Đường thẳng song song với AD và qua M cắt các cạnh AB và DC tương ứng tại P và Q.

Chứng minh rằng nếu MP.MS = MQ.MR, thì M thuộc AC.

Giải



Bài toán được quy về việc chứng minh $\overrightarrow{AM} \,//\, \overrightarrow{AC}$

Từ giả thiết ta suy ra: $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MR}{MS} = k$.

Ta có $\quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AD}$

trong đó: $\quad x = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{MR}{RS} = \dfrac{k}{k+1}; \qquad y = \dfrac{AR}{AD} = \dfrac{MP}{PQ} = \dfrac{k}{k+1}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k+1}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}.$$ Đó là đpcm.

Ví dụ 2. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng và điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để A, B, M thẳng hàng và tồn tại một số thực k sao cho: $\overrightarrow{OM} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \qquad (*)$

với $0 < k < 1$ thì (*) là điều kiện cần và đủ để M nằm trên đoạn AB (hay M ở giữa hai điểm A và B).

Giải

Thật vậy để M ∈ AB cần và đủ là: $\overrightarrow{AM} \,//\, \overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \;\; \overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = (1-k)\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}$ với $0 < k < 1$ và $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \quad M \in AB.$

Ví dụ 3. (*Định lí Mênêlanuýt*)

Cho tam giác ABC và các điểm M, N, E lần lượt trên các đường thẳng AB, BC, CA. Ta đặt: $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = y\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CE} = z\,\overrightarrow{CA}$. Chứng minh rằng để M, N, E thẳng hàng cần và đủ là:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z} = -1 \qquad (1)$$

Giải

Để M, N, E thẳng hàng cần và đủ là tồn tại số k sao cho:

$$\overrightarrow{AN} = (1-k)\,\overrightarrow{AM} + k\,\overrightarrow{AE} \qquad (*)$$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$; $\quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} = z\,\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} = (1-z)\,\overrightarrow{AC}$;

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \qquad (*)$$

$\Leftrightarrow \quad (1-y)\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} = (1-k)x\,\overrightarrow{AB} + k(1-z)\,\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \quad 1 - y = (1-k)x \quad$ và $\quad y = k(1-z) \qquad (**)$

Từ (**) ta suy ra: $x = \dfrac{1-y}{1-k}$ và $1 - z = \dfrac{y}{k}$

$\Rightarrow \quad 1 - x = \dfrac{y-k}{1-k}$ và $z = \dfrac{k-y}{k}$

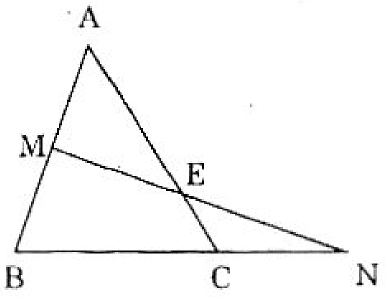
$\Rightarrow \quad \dfrac{x}{1-x}\cdot\dfrac{z}{1-z} = -\dfrac{1-y}{y}$ và (1) được chứng minh.

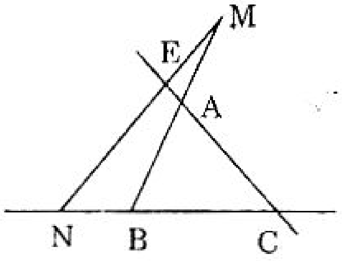
Đảo lại nếu (1) xảy ra, ta cần chứng tỏ M, N, E thẳng hàng. Gọi N' là giao của ME và BC và đặt $\overrightarrow{BN'} = y'\,\overrightarrow{BC}$, khi đó:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y'}{1-y'}\cdot\frac{z}{1-z} = -1.$$

Kết hợp với (1) ta có: $\dfrac{y'}{1-y'} = \dfrac{y}{1-y} \quad \Rightarrow \quad y' = y$

$\Rightarrow \quad BN' = BN \quad \Rightarrow$ N' trùng với N





Khảo sát tính đồng quy của ba đường thẳng

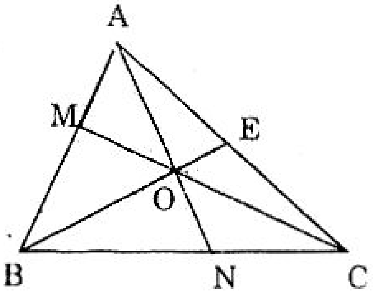
Ví dụ 4. *(Định lí Xêva)*

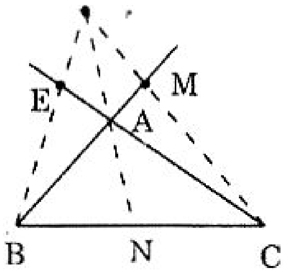
Cho tam giác ABC và các điểm M, N, E lần lượt trên các đường thẳng AB, BC, CA. Ta đặt: $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = y\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CE} = z\,\overrightarrow{CA}$. Chứng minh rằng để CM, AN, BE đồng qui hoặc song song, cần và đủ là:

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z} = 1 \qquad (2)$$

Giải

- Ta xét trường hợp 2 trong 3 đường thẳng cắt nhau:





Gọi O là giao của CM và BE. Vì B, O, E thẳng hàng, nên tồn tại số m sao cho:

$$\overrightarrow{AO} = (1-m)\overrightarrow{AE} \;\Rightarrow\; (1-m)\overrightarrow{AE} + m\overrightarrow{AB} = (1-m)(1-z)\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AB}.$$

Tương tự ta có tồn tại số n sao cho:

$$\overrightarrow{AO} = (1-n)\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{AC} = (1-n)x\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow\quad (1-m)(1-z)\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AB} = (1-n)x\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow\quad (1-m)(1-z) = n \quad\text{và}\quad (1-n)x = m$$

$$\Rightarrow\quad x = \frac{m}{1-n},\quad 1-x = \frac{1-m-n}{1-n},\quad 1-z = \frac{n}{1-m},\quad z = \frac{1-n-m}{1-m}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{x}{1-x} = \frac{m}{1-m-n},\quad \frac{z}{1-z} = \frac{1-n-m}{n} \qquad (*)$$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{BC} = y\,\overrightarrow{AC} + (1-y)\,\overrightarrow{AB}$.

Để A, O, N thẳng hàng; cần và đủ là:

$$\overrightarrow{AO} \,//\, \overrightarrow{AN} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AN} = t.\overrightarrow{AO} \quad \text{(t là số thực)}$$

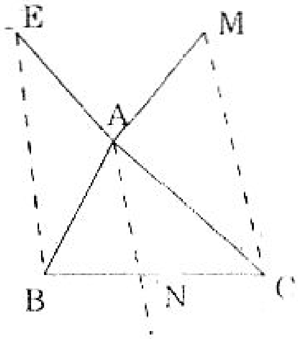
$$\Leftrightarrow \quad y\,\overrightarrow{AC} + (1-y)\,\overrightarrow{AB} = (1-n)xt\,\overrightarrow{AB} + nt\,\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \quad y = nt \quad \text{và} \quad 1-y = (1-n)xt \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1-y} = \frac{n}{(1-n)x} \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \quad \dfrac{x}{1-x}.\dfrac{y}{1-y}.\dfrac{z}{1-z} = 1$

Đảo lại nếu (2) xảy ra và giả sử CM và BE cắt nhau tại O. Gọi N' là giao của OA và BC. Ta đặt $\overrightarrow{BN'} = y'\,\overrightarrow{BC}$, khi đó:

$\dfrac{x}{1-x}.\dfrac{y}{1-y}.\dfrac{z}{1-z} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y'}{1-y'} = \dfrac{y}{1-y}$ hay $y' = y$ và N trùng với N'.



- Trường hợp hai trong ba đường thẳng song song:

Giả sử BE // CM, khi đó tồn tại số thực k sao cho:

$$\overrightarrow{BE} = k.\overrightarrow{CM} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \quad (1-z)\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = k(x\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$\Rightarrow \quad 1 - z = -k \quad \text{và} \quad kx = -1$$

$$\Rightarrow \quad z = 1 + k, \quad x = -\frac{1}{k}, \quad 1 - x = 1 + \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{1-x}.\frac{z}{1-z} = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1-y} = \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{k+1}$$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = y\,\overrightarrow{AC} + (1-y)\,\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CM} = x\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Rõ ràng AN // CM vì $\dfrac{1-y}{x} = -y$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và M là điểm tùy kí không trùng với A_1, B_1, C_1. Kí hiệu a, b, c lần lượt là các đường thẳng qua A, B, C và tương ứng song song với MA_1, MB_1, MC_1. Chứng minh rằng: a, b, c đồng qui.

Giải

Vì a // MA_1, b // MB_1 nên a cắt b tại M'. Ta cần chứng minh rằng c đi qua M'. Điều này tương đương với việc chứng minh M'C // MC_1.

$$\Delta MA_1B_1 \sim \Delta M'AB \quad \Rightarrow \quad AB : A_1B_1 = M'A : MA_1 = M'B : MB_1 = 2$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{A_1B_1} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M'A} - \overrightarrow{M'B} = 2(\overrightarrow{MB_1} - \overrightarrow{MA_1})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{M'A} + 2\,\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{M'B} + 2\,\overrightarrow{MB_1} \qquad (*)$$

Rõ ràng $\overrightarrow{M'A} + 2\,\overrightarrow{MA_1}$ và $\overrightarrow{M'B} + 2\,\overrightarrow{MB_1}$ không đồng phương; nên từ (*) ta suy ra:

$$\overrightarrow{M'A} + 2\,\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{M'B} + 2\,\overrightarrow{MB_1} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M'A} = -2\,\overrightarrow{MA_1},\ \overrightarrow{M'B} = -2\,\overrightarrow{MB_1}\,.$$

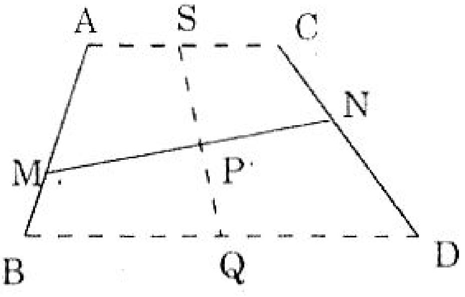
Xét $\overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{AC} = -2\,\overrightarrow{MA_1} + 2\,\overrightarrow{AB_1} = -2(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}) = -2\,\overrightarrow{MC_1}$ (**)

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{M'C} \,/\!/\, \overrightarrow{MC_1}$.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 6. Cho hai đoạn thẳng AB và CD. Trên đoạn AB ta lấy điểm M; trên đoạn CD lấy điểm N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn MN, khi M và N thay đổi.

Giải



Ta chọn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ làm cơ sở. Kí hiệu S, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AC, MN, BD. Ta có:

$$2\,\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN} \qquad (*);$$

$$2\,\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \qquad (**)$$

Từ $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = m \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AM} = m\,\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN} = m.\overrightarrow{CD}$.

Thay các kết quả đó vào (*) ta suy ra:

$2\,\overrightarrow{SP} = m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = m\,\overrightarrow{SQ}$. Điều đó chứng tỏ P ∈ SQ.

Đảo lại với P ∈ SQ ta cần chỉ ra tồn tại M và N thuộc các đoạn AB và CD sao cho $\overrightarrow{AM} = m\,\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN} = m\,\overrightarrow{CD}$ và P là trung điểm của đoạn MN. Thật vậy; tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{SP} = k\,\overrightarrow{SQ}$. Nếu ta dựng các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\,\overrightarrow{CD}$, thì ta chứng minh được P là trung điểm của MN.

Khảo sát tính song song của các đường thẳng

Ví dụ 7. Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh rằng nếu các cạnh của tam giác A'B'C' mà song song với các trung tuyến của tam giác ABC, thì các cạnh của tam giác ABC phải song song với các trung tuyến của tam giác A'B'C'.

Giải

Kí hiệu AM, BN, CE là ba trung tuyến của tam giác ABC.

Rõ ràng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$; điều đó chứng tỏ AM, BN, CE là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Ta có thể coi $\overrightarrow{A'B'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{B'C'}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BN}$ vì tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác lập bởi các cạnh là các véc tơ bằng $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CE}$, nên ta có:

$$\overrightarrow{A'B'}=k.\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{B'C'}=k.\overrightarrow{BN}\quad \text{(k là tỉ số đồng dạng)}$$

Mặt khác, ta có:

$$\overrightarrow{C'A'}=-(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'})=-k(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{CE}=-(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN})\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{C'A'}=k.\overrightarrow{CE}$$

Ta kí hiệu A'M', B'N', C'E' là ba trung tuyến của tam giác A'B'C' và xuất phát từ các hệ thức:

$$2\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}=k(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{CE})=1,5k\,\overrightarrow{AC}\ ;$$

$$2\overrightarrow{B'N'}=\overrightarrow{B'A'}+\overrightarrow{B'C'}=k(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM})=1,5k\,\overrightarrow{BA}\ ;$$

$$2\overrightarrow{C'E'}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{C'B'}=k(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{BN})=1,5k\,\overrightarrow{CB}\ ,\qquad \text{ta suy ra đpcm.}$$

Khảo sát tính đồng phương của các véc tơ

Ví dụ 8. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Ta đặt $\vec{u}=3\vec{a}+8\vec{b}$ và $v=\vec{a}-\vec{b}$. Hỏi hai véc tơ đó có đồng phương không ?

Giải

Giả sử hai véc tơ đó đồng phương, khi đó tồn tại số x sao cho:

$$\vec{u}=x.\vec{v}\quad\Leftrightarrow\quad 3.\vec{a}+8.\vec{b}=x.\vec{a}-x.\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad x=3\ \text{ và }\ x=-8.$$

Điều này không thể xảy ra và hai véc tơ không đồng phương.

Ví dụ 9. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phương.

Đặt $\vec{u} = (1 + x)\vec{a} + (x - 4)\vec{b}$ và $\vec{v} = 3\vec{a} - x\vec{b}$.

Xác định x để $\vec{u} \parallel \vec{v}$ và tính tỉ số độ dài hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Giải

Để $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists m$ sao cho $\vec{u} = m.\vec{v}$

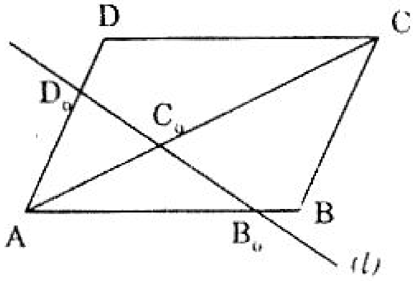
$\Leftrightarrow 1 + x = 3m$ và $x - 4 = -mx \Leftrightarrow x = 2\ ;\ x = -6.$

Tỉ số độ dài hai véc tơ là $|m| = 1$ hoặc $|m| = \frac{5}{3}$.

Chứng minh hệ thức hình học

Ví dụ 10. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng *(l)* không đi qua A cắt các đường thẳng AB, AC, AD tương ứng tại B_0, C_0, D_0. Ta đặt $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{AB_0}\ ;\ \overrightarrow{AC} = y\,\overrightarrow{AC_0}\ ;\ \overrightarrow{AD} = z\,\overrightarrow{AD_0}$. Chứng minh rằng: $x + z = y$.

Giải



Rõ ràng ba điểm B_0, C_0, D_0 thẳng hàng.

Theo ví dụ 6; tồn tại số thực k sao cho:

$$\overrightarrow{AC_0} = (1 - k)\overrightarrow{AB_0} + k\,\overrightarrow{AD_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{x}(1 - k)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{z}.\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{x}(1 - k).\overrightarrow{AB} + \frac{1}{z}k.\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x}(1 - k) \text{ và } \frac{1}{y} = \frac{1}{z}k \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = 1.$$ Đó là đpcm.

Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng đi qua

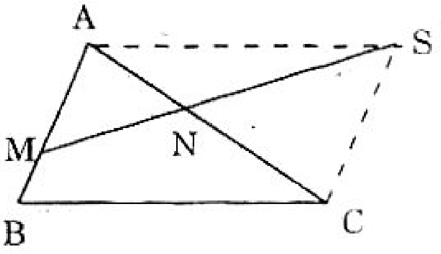
Ví dụ 11. Cho tam giác ABC và các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AB và AC sao cho: $\overrightarrow{AB} = q\,\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = (q + 1)\overrightarrow{AN}$ với mọi số $q > 0$.

Chứng minh rằng khi q thay đổi, thì đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Giải

Giả sử S là điểm cố định mà MN đi qua khi q thay đổi.

Điều đó có nghĩa là $\overrightarrow{MS} \parallel \overrightarrow{MN}\ \forall q$. Bài toán chuyển về xác định điểm S



sao cho $\overrightarrow{MS} \parallel \overrightarrow{MN}$ $\forall q$. Ta hãy phân tích $\overrightarrow{MS}$ và $\overrightarrow{MN}$ theo cơ sở $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Vì $S \in MN \Rightarrow \exists k$ sao cho:

$$\overrightarrow{MS} = k\,\overrightarrow{MN} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM})$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AS} = k\,\overrightarrow{AN} + (1-k)\,\overrightarrow{AM} = \frac{k}{q+1}\overrightarrow{AC} + \frac{1-k}{q}\overrightarrow{AB}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{AS} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ (x, y là số thực phải tìm)

$\Rightarrow$ $xq = 1 - k$ và $y(1 + q) = k$ nghiệm đúng $\forall q$

$\Rightarrow$ $(x + y)q = 1 - y$ $\forall q$ $\Rightarrow$ $x = -1$, $y = 1$.

9. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho MB = MC, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EA}$. Trên đường thẳng AB lấy điểm N và gọi O là giao điểm của AM và BE. Ta đặt $\overrightarrow{AN} = x\,\overrightarrow{AB}$. Xác định các giá trị của x để 3 điểm C, O, N thẳng hàng.

Hướng dẫn: Dùng định lí Xêva (ví dụ 9), ta suy ra: $x = \frac{1}{3}$.

2. Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Gọi O là giao điểm của trung tuyến AM và phân giác BE. Trên AB ta lấy điểm N và đặt $\overrightarrow{AN} = x\,\overrightarrow{AB}$. Xác định x để 3 điểm C, O, N thẳng hàng.

Hướng dẫn: Dùng định lí Xêva, ta suy ra: $x = \frac{c}{a+c}$.

3. Cho tam giác ABC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu H là điểm thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, thì H là trực tâm của tam giác và trọng tâm G của tam giác thuộc đoạn OH.

Hướng dẫn: Ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$ (M là trung điểm của BC) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{OM}$. Do OM vuông góc với BC nên AH vuông góc với BC hay AH là đường cao của tam giác kẻ từ A.

Tương tự ta có $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{ON}$ (N là trung điểm của AC).

Từ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GO}$ $\Rightarrow$ $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.

4. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB ta lấy lần lượt các điểm A', B', C' sao cho 3 đoạn thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tại O và

$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh rằng O là trọng tâm của tam giác.

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta suy ra $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$.

Đặt $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = y\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = z\overrightarrow{CA}$.

Theo định lí Xêva, ta có: $\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\frac{z}{1-z} = 1$ (*)

Ta dựng $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{CB'}$, khi đó $\overrightarrow{A''B} = \overrightarrow{AC'}$

$\Rightarrow A'' \in AB$ và như vậy $\Delta ABC \backsim \Delta A'BA''$

$\Rightarrow A''B : AB = BA' : BC = A'A'' : CA = k \quad (k > 0) \quad \Rightarrow \quad x = y = z = k.$

Từ (*) ta suy ra x = 0,5 hay A', B', C' là trung điểm các cạnh tam giác.

5. Cho góc xOy. Trên cạnh Ox ta lấy các điểm A_1 và A_2. Trên Oy lấy các điểm B_1 và B_2. Giả sử đoạn A_1B_1 cắt đoạn A_2B_2 tại M và kí hiệu N, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng A_2B_1, A_1B_2, OM.

Ta đặt $\overrightarrow{OA_2} = p\overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{OB_2} = q\overrightarrow{OB_1}$.

i) Hãy phân tích véc tơ $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OE}$ theo $\overrightarrow{OA_1}$ và $\overrightarrow{OB_1}$.

ii) Chứng minh rằng ba điểm F, N, E thẳng hàng.

Hướng dẫn: i) $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA_1} + (1-m)\overrightarrow{OB_1}$,

$$\overrightarrow{OM} = n\overrightarrow{OA_2} + (1-n)\overrightarrow{OB_2} = np\overrightarrow{OA_1} + (1-n)q\overrightarrow{OB_1}$$

$$\Rightarrow \quad np = m \quad \text{và} \quad (1-n)q = 1-m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{p(1-q)}{p-q}, \quad n = \frac{1-q}{p-q} \quad (*)$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{q}{2}\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB_1} = \frac{p}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{p(1-q)}{2(p-q)}\overrightarrow{OA_1} + \frac{q(p-1)}{2(p-q)}.\overrightarrow{OB_1}$$

ii) Ta lập các véc tơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{NF}$:

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{ON}$ và chứng tỏ $\overrightarrow{EF} \,//\, \overrightarrow{NF}$.

6. Cho tứ giác lồi ABCD và O là giao điểm hai đường chéo tứ giác, biết

$$OC : OA = p : 1, \quad OD : OB = q : 1.$$

i) Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N là điểm thuộc CD và đặt CN = xCD. Xác định x để ba điểm M, O, N thẳng hàng.

ii) Gọi E là trung điểm của cạnh BC, F là điểm thuộc DA và đặt $\overrightarrow{AF} = y\,\overrightarrow{AD}$. Xác định y để ba điểm E, O, F thẳng hàng.

Hướng dẫn: i) Từ giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{OC} = -p\,\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OD} = -q\,\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{OC} + x\,\overrightarrow{CD} = (1-x)\overrightarrow{OC} + x\,\overrightarrow{OD}$$

$$= (1-x)(-p)\overrightarrow{OA} + (-qx)\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OM} = 0,5\,\overrightarrow{OA} + 0,5\,\overrightarrow{OB}$ và từ $\overrightarrow{OM} \,//\, \overrightarrow{ON}$, ta suy ra:

$$(1-x)p = qx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{p+q}.$$

7. Cho tứ giác ABCD. Ta kí hiệu A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC và G là trọng tâm của tứ giác. Chứng minh rằng: 4 đường thẳng A_1A, B_1B, C_1C, D_1D cùng đi qua G.

Hướng dẫn: Xuất phát từ các hệ thức:

$$3\,\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, ta suy ra: $3\,\overrightarrow{AA_1} = 2\,\overrightarrow{GA}$; nghĩa là: $\overrightarrow{AA_1} \,//\, \overrightarrow{GA}$.

8. Cho hình thang ABCD (AB // CD) và M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

i) Gọi O là giao điểm các đường chéo hình thang. Chứng minh rằng: M, O, N thẳng hàng.

ii) Trên phần kéo dài của BD ta lấy điểm S và kí hiệu E, F lần lượt là giao điểm của SM với AD; SF với BC. Chứng minh rằng: EF // AB // CD.

Hướng dẫn:

i) Đặt $k = OA : OC = OB : OD \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} = -k\,\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OB} = -k\,\overrightarrow{OD}.$

Ta có $\quad 2\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -k(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \qquad (*)$

$\quad 2\,\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \qquad (**)$

Từ (*) và (**) ta suy ra đpcm.

ii) Đặt $\overrightarrow{AE} = x\,\overrightarrow{BD}$, $\quad \overrightarrow{BF} = y\,\overrightarrow{BC}$, $\quad \overrightarrow{DS} = z\,\overrightarrow{DB}$.

Theo định lí Mênêlauýt (ví dụ 8) áp dụng cho các tam giác ABD và BCD, ta có:

$$\frac{x}{1-x}\,\frac{z}{1-z} = -1, \qquad \frac{y}{1-y}\,\frac{z}{1-z} = -1 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} \quad \Rightarrow \quad EF \,//\, AB.$$

9. Cho hình bình hành ABCD và điểm M thuộc đường chéo AC (M không trùng với các đỉnh A và C). Trên các cạnh AB và BC ta lấy các điểm tương ứng P và Q sao cho MP // BC và MQ // AB. Gọi N là giao điểm của AQ và CP.

i) Ta đặt $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AC}$. Hãy phân tích $\overrightarrow{DM}$ và $\overrightarrow{DN}$ theo cơ sở $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$.

ii) Chứng minh rằng ba điểm D, M, N thẳng hàng.

Hướng dẫn:

i) $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA} + k\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} + k(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = (1-k)\,\overrightarrow{DA} + k\,\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + x\,\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{DA} + x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}) = \overrightarrow{DA} + x\,\overrightarrow{DC} + x\,\overrightarrow{BQ}$$

$$= \overrightarrow{DA} + x\,\overrightarrow{DC} - kx\,\overrightarrow{DA} = (1-kx)\,\overrightarrow{DA} + x\,\overrightarrow{DC}$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{DC} + y\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{DC} + y(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP})$$

$$= \overrightarrow{DC} + y\,\overrightarrow{CB} + y\,\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{DC} + y(k-1)\,\overrightarrow{DC} + y\,\overrightarrow{DA}$$

$$= (1 + yk - y)\,\overrightarrow{DC} + y\,\overrightarrow{DA}$$

Từ hai phân tích của $\overrightarrow{DN}$ ta suy ra: $y = 1 - kx$ và $1 + yk - y = x$

$$\Rightarrow \quad yk = (1-k)x \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{DN} = \frac{1-k}{1-k+k^2}\,\overrightarrow{DA} + \frac{k}{1-k+k^2}\,\overrightarrow{DC}$$

ii) D, M, N thẳng hàng khi $\overrightarrow{DM} \,//\, \overrightarrow{DN} \Leftrightarrow \exists t$ sao cho $\overrightarrow{DN} = t\,\overrightarrow{DM}$

và $t = 1 - k + k^2$.

10. Cho tam giác ABC và trung tuyến AM. Trên các cạnh AB và AC ta lấy các điểm B' và C'. Đường thẳng B'C' cắt AM tại M'. Ta đặt $\overrightarrow{AB} = x\,\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC} = y\,\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AM} = z\,\overrightarrow{AM'}$. Chứng minh rằng: $x + y = 2z$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $M' \in A'B' \Rightarrow \exists k$ sao cho:

$$\overrightarrow{AM'} = (1-k)\overrightarrow{AB'} + k\overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{z}\right)\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1-k}{x}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{k}{y}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2z}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2z}\right)\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1-k}{x}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{k}{y}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2z} = \frac{1-k}{x} \text{ và } \frac{1}{2z} = \frac{k}{y} \Leftrightarrow x + y = 2z.$$

11. Cho ngũ giác lồi ABCDE có BC // AD, CD // BE, DE // AC, AE // BD. Chứng minh rằng: AB // CE.

Hướng dẫn: Ta cần chứng minh rằng $\exists k$ sao cho: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CE}$

Gọi F và G là giao điểm của AD và BE, AC và BE; ta có BCDF là hình bình hành, nên FB = CD, FD = BC.

$$\Delta AFE \backsim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AF}{BC} = \frac{FE}{CD} \Rightarrow \frac{AF+BC}{BC} = \frac{FE+CD}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{BE}{CD}$$ Tương tự ta có: $$\frac{AC}{DE} = \frac{BD}{AE}$$

$$\Delta BED \backsim \Delta EGA \Rightarrow \frac{GE}{BE} = \frac{AE}{BD}.$$

Tứ giác CDEG là hình bình hành, nên: $EG = CD \Rightarrow \dfrac{CD}{BE} = \dfrac{AE}{BD}$.

Vậy ta có: $$\frac{BC}{AD} = \frac{CD}{BE} = \frac{AE}{BD} = \frac{DE}{AC} = x$$

hay $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE} = x\overrightarrow{CA}$.

Từ $$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = x\overrightarrow{BD} + x\overrightarrow{AC} + x\overrightarrow{EB} + x\overrightarrow{DA}$$

$$= x(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = x\overrightarrow{EC} \Rightarrow k = -x.$$

12. Cho tam giác ABC và đường thẳng (d) cắt các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1 và đặt $\vec{U} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{V} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}$, $\vec{W} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1A_1}$. Chứng minh rằng: $\vec{U} + \vec{V}$ // $\vec{W}$.

Hướng dẫn: Rõ ràng $\vec{U} + \vec{V} = -\vec{W}$; đây là điều cần chứng minh.

13. Cho ngũ giác ABCDE và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE. Kí hiệu R và S là trung điểm của các đoạn MP và NQ.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{RS}$ // $\overrightarrow{AE}$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ các hệ thức sau:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \qquad (*)$$

và $$2\overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{RN} + 2\overrightarrow{NP} + 2\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{NC} + 2\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DQ}$$

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DQ}$$

$$\Rightarrow \quad 4\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \qquad (**)$$

14. Cho góc xOy. Trên cạnh Ox ta lấy 3 điểm A_1, A_2, A_3 sao cho $OA_2 = 3OA_1$, $OA_3 = 5OA_1$. Trên cạnh Oy lấy các điểm B_1, B_2, B_3 sao cho $OB_2 = 4OB_1$, $OB_3 = 6OB_1$. Gọi M là trung điểm của đoạn A_1B_1, N là điểm thuộc A_3B_3. Tìm vị trí của N sao cho MN đi qua trung điểm của đoạn A_2B_2.

Hướng dẫn: Đặt $\overrightarrow{A_3N} = x.\overrightarrow{A_3B_3}$. Hãy phân tích các véc tơ $\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MN}$ theo cơ sở là véc tơ $\overrightarrow{OA_1}$ và $\overrightarrow{OB_1}$ (I là trung điểm của A_2B_2) và buộc $\overrightarrow{MI} \,//\, \overrightarrow{MN}$, ta sẽ tìm được $x = \frac{29}{54}$.

15. Cho tam giác ABC và trung tuyến CM. Đường thẳng (d) // CM cắt BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A_1, B_1, C_1.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{CM}$.

Hướng dẫn: Ta xét trường hợp (d) nằm trong nửa mặt phẳng chứa A và B_1 thuộc cạnh AC, khi đó C_1 thuộc đoạn AM.

Đặt $k = \frac{BA_1}{BC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{B_1C_1}{CM} = \frac{AC_1}{AM} = \frac{AC_1}{MB} = MA - \frac{MC_1}{MB} = 1 - \frac{MC_1}{MB} = 1 - \frac{CA_1}{BC}$$

$$= 1 - (k - 1) = 2 - k$$

Ta có $\overrightarrow{A_1C_1} = k\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = (2 - k)\overrightarrow{CM}$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Trường hợp B_1 nằm ngoài AC; lí luận tương tự.

16. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng nếu điểm I thỏa mãn hệ thức $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta suy ra:

$$a.\overrightarrow{IA} = -b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) - c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) \quad \Rightarrow \quad 2p.\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.$$

Kẻ phân giác AD, ta có:

$$(b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad (b+c)\overrightarrow{AD} = 2p\overrightarrow{AI}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} \,//\, \overrightarrow{AI} \quad \Rightarrow \quad I \in AD.$$

Lí luận tương tự; ta suy ra I thuộc phân giác góc B.

17. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình bình hành ABCD ta lấy lần lượt các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 sao cho $\overrightarrow{AA_1} = k\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{BB_1} = k\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{CC_1} = k\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{D_1A}$ $(k \neq 0)$. Trên các đoạn A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 ta lấy các điểm tương ứng A_2, B_2, C_2, D_2 sao cho:

$$\overrightarrow{A_2B_1} = k\overrightarrow{A_1A_2}, \qquad \overrightarrow{B_2C_1} = k\overrightarrow{B_1B_2}$$

$$\overrightarrow{C_2D_1} = k\overrightarrow{C_1C_2}, \qquad \overrightarrow{D_2A_1} = k\overrightarrow{D_1D_2}$$

Chứng minh rằng các đường thẳng BA_2, CB_2, DC_2, AD_2 đi qua giao điểm các đường chéo của hình bình hành.

18. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{3}AC$ và O là giao điểm của CM và BN.

i) Đặt $\overrightarrow{ON} = x\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{OC}$. Hãy xác định x và y.

ii) Trên BC lấy điểm E và đặt $\overrightarrow{BE} = z.\overrightarrow{BC}$. Hãy xác định z để A, O, E thẳng hàng.

ĐS: $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{4}$, $z = \frac{1}{3}$.

19. Cho tam giác ABC có $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$. Gọi N là trung điểm của cạnh AC, M là chân đường phân giác góc C trên cạnh AB, O là giao điểm của BN và CM.

i) Đặt $\overrightarrow{ON} = x\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OM} = y\overrightarrow{OC}$. Xác định x và y.

ii) Lấy trên BC điểm E và đặt $\overrightarrow{BE} = z\overrightarrow{BC}$. Tìm z để A, O, E thẳng hàng.

ĐS: $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{2}{5}$, $z = \frac{2}{5}$.

20. Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Kí hiệu M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. M', N' là trung điểm các cạnh A'B', B'C'.

Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$ thì $\overrightarrow{MM'} \,//\, \overrightarrow{NN'}$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ các hệ thức véc tơ:

$$2\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} \quad \text{và} \quad 2\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.$$

21. Cho hai tứ giác ABCD và A'B'C'D' có $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{A'D'}$ (k là số thực khác 0). M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. M', N' lần lượt là trung điểm các cạnh A'B' và C'D'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{M'N'}$.

22. Kí hiệu M, N, E lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Trên cạnh BC ta lấy hai điểm A_1 và A_2 đối xứng nhau qua M; trên CA lấy hai điểm B_1 và B_2 đối xứng nhau qua N; trên AB lấy hai điểm C_1 và C_2 đối xứng nhau qua E. Chứng minh rằng trọng tâm của ba tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ thẳng hàng.

Hướng dẫn: Kí hiệu G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$.

Ta có: $3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}$, $\quad 3\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GB_2} + \overrightarrow{GC_2}$

$$\Rightarrow \quad 3(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2}) = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GE}) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GG_1} // \overrightarrow{GG_2}.$$

23. Cho tứ giác ABCD và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA; A_1, A_2 là hai điểm thuộc cạnh AB và đối xứng với nhau qua M; B_1, B_2 thuộc cạnh BC và đối xứng với nhau qua N; C_1C_2 thuộc cạnh CD và đối xứng với nhau qua P; D_1, D_2 thuộc cạnh DA và đối xứng với nhau qua Q. Chứng minh rằng trọng tâm của các tứ giác ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ thẳng hàng.

24. Trên hai cạnh góc vuông xOy ta lấy các điểm A và B sao cho OA = OB = 1; C là một điểm thuộc đoạn OA, N là một điểm thuộc OB sao cho OCMN là hình vuông. Trên đoạn CM lấy điểm Q sao cho ACQP là một hình vuông. Gọi S là giao điểm của AM và PN và đặt $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AS} = x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NS} = y\overrightarrow{NP}$

i) Hãy xác định x và y theo k. ii) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OS} // \overrightarrow{OQ}$

iii) Chứng minh rằng khi C thay đổi trên đoạn OA, thì đường thẳng SC đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn:

i) $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NS}$; $\quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AM}$

$$= \overrightarrow{OA} + x(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}) = (1 - x)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OM} =$$

$$= (1 - x)\overrightarrow{OA} + kx\overrightarrow{OA} + kx\overrightarrow{OB} = (1 - x + kx)\overrightarrow{OA} + kx\overrightarrow{OB};$$

$$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NS} = k\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{NP} = k\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OP} - y\overrightarrow{ON}$$

$$k\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{AP} - yk\overrightarrow{OB} = k(1-y)\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OA} + y(1-k)\overrightarrow{OB}$$

$$= (k - 2ky + y)\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OA}$$

$\Rightarrow \quad 1 - x + kx = y \quad$ và $\quad kx = k - 2yk + y$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{k^2}{2k^2 - 2k + 1}, \quad x = \dfrac{1 - k}{2k^2 - 2k + 1}$

ii) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CQ} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$. Cần chứng tỏ rằng:

$$\frac{k + y(1 - 2k)}{1 - k} = \frac{y}{k} \quad \text{với} \quad y = \frac{k^2}{2k^2 - 2k + 1}$$

iii) Gọi D là điểm cố định mà SC đi qua; khi đó: $\overrightarrow{CD} \,//\, \overrightarrow{SC} \Rightarrow$ tồn tại số thực α sao cho $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{SC}$ và từ điều kiện này ta tìm được D (Xem ví dụ 11).

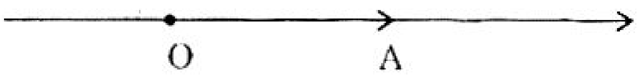
TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

10. TRỤC TỌA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Trục tọa độ

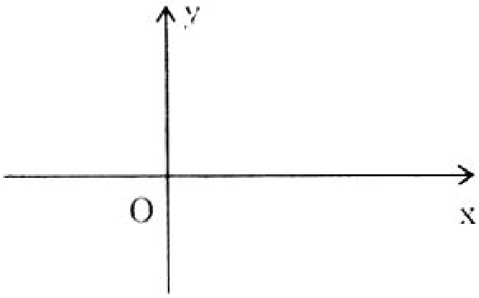
Trục tọa độ là một đường thẳng mà trên đó cho trước một điểm và một véc tơ đơn vị có gốc là điểm đã cho. Điểm đã cho được gọi là gốc tọa độ.

Chẳng hạn trên đường thẳng x cho điểm O và véc tơ đơn vị $\overrightarrow{OA}$, khi đó x là một trục tọa độ gốc O và gọi là Ox. Thông thường trục tọa độ Ox được biểu diễn nằm ngang, véc tơ đơn vị $\overrightarrow{OA}$ có chiều từ trái sang phải. Đôi khi trục tọa độ được biểu diễn theo phương thẳng đứng và chiều của véc tơ đơn vị từ dưới lên. Việc lựa chọn cách biểu diễn trục tọa độ còn phụ thuộc vào ý thích của mỗi chúng ta hoặc vào một bài toán cụ thể.



Nếu trên một đường thẳng x ta chỉ cho một véc tơ đơn vị, thì đường thẳng x cùng với véc tơ đơn vị được gọi là một trục. Như vậy giữa trục và trục tọa độ khác nhau ở điểm gốc.

Hệ tọa độ trực chuẩn



Đó là một hệ gồm hai trục tọa độ Ox và Oy vuông góc với nhau tại gốc chung O và các véc tơ đơn vị của hai trục tọa độ có độ dài bằng nhau và có gốc là O. Trục Ox được gọi là trục hoành và thường biểu diễn nằm ngang, chiều của véc tơ đơn vị trên đó từ trái sang phải. Trục Oy được gọi là trục tung và được biểu diễn thẳng đứng, chiều của véc tơ đơn vị trên đó từ dưới lên.

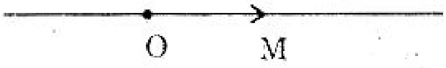
11. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VÉC TƠ TRÊN MỘT TRỤC TỌA ĐỘ

Tọa độ của một véc tơ

Cho véc tơ $\vec{a}$ trên trục tọa độ Ox mà véc tơ đơn vị là $\vec{e}$, khi đó tồn tại duy nhất số thực m sao cho $\vec{a} = m.\vec{e}$ (*). Số m được gọi là tọa độ của $\vec{a}$ và kí hiệu $\vec{a}(m)$. Độ dài của $\vec{a}$ là $|m| \Leftrightarrow |\vec{a}| = |m|$.

Tọa độ của một điểm trên trục tọa độ

Cho điểm M trên trục tọa độ Ox; khi đó ta xác định được véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và kí hiệu m là tọa độ của $\overrightarrow{OM}$. Khi đó, ta nói m là tọa độ của điểm M và kí hiệu M(m).



Giả sử A(a) và B(b) là hai điểm trên trục tọa độ, khi đó

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b.\vec{e} - a.\vec{e} = (b - a).\vec{e}.$$

Hệ thức đó chứng tỏ $\overrightarrow{AB}(b - a)$. Tóm lại; để tìm tọa độ của một véc tơ khi biết tọa độ điểm đầu và cuối của nó, ta chỉ lập hiệu của tọa độ điểm cuối và tọa độ điểm đầu. Véc tơ $\vec{0}$ có tọa độ 0, tức là $\vec{0}(0)$.

Cho $\vec{a}(x_1)$ và $\vec{b}(x_2)$, rõ ràng:

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1.\vec{e} = x_2.\vec{e} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2).\vec{e} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ trên một trục tọa độ

Cho $\vec{a}(x_1)$ và $\vec{b}(x_2)$, đặt $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; khi đó $\vec{c}(x_1 + x_2)$.

$\vec{u} = m.\vec{a}$; khi đó $\vec{u}(mx_1)$.

- ***Chú ý:***

i) Nếu $\vec{a}$ được đặt trên một trục x, thì số m trong (*) còn được gọi là độ dài đại số của a và được kí hiệu a ; vậy thì m = a . Các kết quả của véc tơ trên trục tọa độ vẫn còn đúng trên một trục.

ii) Cho hai trục x và x' cùng phương và các véc tơ đơn vị bằng nhau.

Nếu $\vec{U}$ và $\vec{U'}$ là các véc tơ trên x và x', thì $\vec{U} = \vec{U'} \Leftrightarrow \overline{U} = \overline{U'}$. Ta có thể thực hiện các phép toán đại số trên tập hợp độ dài đại số của các véc tơ trên hai trục x và x'.

Tìm điểm chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước

Cho hai điểm $A(x_1)$, $B(x_2)$ và k là một số thực khác 0. Tìm tọa độ điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \quad (*) \qquad \text{và kí hiệu } \frac{MA}{MB} = k.$$

Kí hiệu x là tọa độ của M; ta có: $\overrightarrow{MA}(x_1 - x)$, $\overrightarrow{MB}(x_2 - x)$

và từ (*) ta có: $x_1 - x = k(x_2 - x)$ (**)

Phương trình (**) cho ta giá trị của x (với $k \neq 1$). Nếu M là trung điểm của AB, thì k = −1 và do đó: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

12. DÙNG VÉC TƠ TRÊN TRỤC TỌA ĐỘ ĐỂ GIẢI TOÁN

Việc sử dụng véc tơ trên trục tọa độ cho phép ta giải được một số dạng toán hình học. Phương pháp này dựa trên các nguyên tắc sau:

i) Chuyển đổi các điều kiện hình học của bài toán sang dạng tọa độ.

ii) Dùng các kết quả của lí thuyết để giải bài toán đó dưới dạng đại số.

iii) Kết quả thu được lại đưa về ngôn ngữ hình học.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trên trục tọa độ Ox cho bốn điểm A(1), B(2), C(3), D(6). Tìm tọa độ M sao cho: $1 : \overline{AM} + 2 : \overline{BM} + 3 : \overline{CM} = 6 : \overline{DM}$.

Giải

Kí hiệu x là tọa độ của M, ta có:

$$\overline{AM} = x - 1, \quad \overline{BM} = x - 2, \quad \overline{CM} = x - 3, \quad \overline{DM} = x - 6.$$

Thay các kết quả đó vào điều kiện bài toán, ta được:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6}.$$

Giải phương trình này ta được: $x = \dfrac{21 + 3\sqrt{5}}{11}$, $x = \dfrac{21 - 3\sqrt{5}}{11}$.

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D trên một trục (d). Ta nói C và D chia điều hòa đoạn AB, nếu $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (*) và ta thường gọi bốn điểm đó là hàng điểm điều hòa.

i) Chứng minh rằng $\dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$ (**)

ii) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{BD} = 0$ (***)

Giải

i) Chọn trên trục (d) điểm A làm gốc tọa độ, khi đó các điểm B(b), C(c), D(d).

$$(*) \Leftrightarrow \overline{CA}.\overline{DB} + \overline{CB}.\overline{DA} = 0 \Leftrightarrow 2cd = b(c + d)$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{AD}) \Leftrightarrow (**)$$

ii) Ta có $\dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{c}$; $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{d}$; $\dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{c - b}$; $\dfrac{1}{BD} = \dfrac{1}{d - b}$ (***)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{c - b} + \frac{1}{d - b} = \frac{c + d}{cd} + \frac{c + d - 2b}{(d - b)(c - b)}$$

$$= \frac{2}{b}\left\{1 + \frac{cd - b^2}{(d - b)(c - b)}\right\} = 0.$$

13. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho hai điểm A(8) và B(−6). Gọi A_1 và B_1 là các điểm đối xứng của A và B qua gốc tọa độ. Tìm tọa độ điểm C sao cho:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{B_1C} = 0.$$

ĐS: 0, $5\sqrt{2}$, $-5\sqrt{2}$.

2. Cho bốn điểm A(−8), B(−9), C(−15), D(−6). Tìm tọa độ điểm X sao cho:

$$\frac{2}{AX} + \frac{5}{BX} = \frac{3}{CX} + \frac{4}{DX}$$

ĐS: 6; $-\dfrac{33}{4}$.

3. Cho bốn điểm A(1), B(2), C(3), D(4) và các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt đối xứng với các điểm đã cho qua gốc tọa độ. Tìm tọa độ của điểm M sao cho:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A_1M}}+\frac{\overline{BM}}{\overline{B_1M}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{C_1M}}+\frac{\overline{DM}}{\overline{D_1M}}$$

ĐS: $0;\ \frac{5\pm\sqrt{3}}{2}$.

4. Cho bảy điểm $A_1(-1)$, $A_2(-2)$, $A_3(-3)$, ..., $A_7(-7)$. Tìm điểm X sao cho:

$$\frac{1}{OX}+\frac{1}{A_2X}+\frac{1}{A_5X}+\frac{1}{A_7X}=\frac{1}{A_1X}+\frac{1}{A_3X}+\frac{1}{A_4X}+\frac{1}{A_6X}$$ (O là gốc tọa độ).

ĐS: $-\frac{7}{2}$.

5. Cho ba điểm A(a), B(b), C(c) với $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Tìm điểm X sao cho:

$$\frac{a}{AX}+\frac{b}{BX}+\frac{c}{CX}=-3.$$

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta suy ra:

$$\left(\frac{a}{x-a}+1\right)+\left(\frac{b}{x-b}+1\right)+\left(\frac{c}{x-c}+1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

hoặc $\quad 3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0.$

6. Cho ba điểm A(a), B(b), C(c) và A', B', C' là các điểm đối xứng của A, B, C qua gốc tọa độ. Chứng minh rằng: $\frac{CB}{C'B}+\frac{AC}{A'C}+\frac{BA}{B'A}=-\frac{CB.AC.BA}{C'B.A'C.B'A}$.

7. Cho bốn điểm A(a), B(b), C(c), D(d).

i) Chứng minh rằng: $\quad \overline{AB}.\overline{CD}+\overline{AC}.\overline{DB}+\overline{AD}.\overline{BC}=0$

ii) Chứng minh rằng: $\quad \overline{AB}^2.\overline{CD}+\overline{AC}^2.\overline{DB}+\overline{AD}^2.\overline{BC}+\overline{CD}.\overline{DB}.\overline{BC}=0$.

8. Cho ba điểm A(a), B(b), C(c). Chứng minh rằng:

$$\frac{\overline{OA}^3}{\overline{CA}.\overline{BA}}+\frac{\overline{OB}^3}{\overline{AB}.\overline{CB}}+\frac{\overline{OC}^3}{\overline{AC}.\overline{BC}}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$$ (O là điểm gốc)

Hướng dẫn:

$$\frac{\overline{OA}^3}{\overline{CA}.\overline{BA}}+\frac{\overline{OB}^3}{\overline{AB}.\overline{CB}}+\frac{\overline{OC}^3}{\overline{AC}.\overline{BC}}=\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{a^3}{(a-c)(a-b)}$$

$$=\frac{ac(a^2-c^2)+cb(c^2-b^2)+ba(b^2-a^2)}{(c-a)(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{ac(a^2-b^2+b^2-c^2)+cb(c^2-b^2)+ba(b^2-a^2)}{(c-a)(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{a(a^2-b^2)(c-b)+c(b^2-c^2)(a-b)}{(c-a)(a-b)(b-c)}=a+b+c.$$

9. Cho sáu điểm A(a), B(b), C(c), X(x), Y(y), Z(z). Chứng minh rằng:

$$\frac{XA.YA.ZA}{CA.BA}+\frac{XB.YB.ZB}{CB.AB}+\frac{XC.YC.ZC}{AC.BC}=\overline{XA}+\overline{YB}+\overline{ZC}$$

10. Cho ba điểm A(a), B(b), C(c) và O là gốc tọa độ thỏa mãn điều kiện $\frac{OA}{CB}+\frac{OB}{AC}+\frac{OC}{BA}=0$. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{CB^2}+\frac{OB}{AC^2}+\frac{OC}{BA^2}=0$.

14. TÓM LƯỢC VÉC TƠ TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỰC CHUẨN

Tọa độ của một véc tơ và của một điểm

Trong hệ tọa độ Oxy cho véc tơ $\vec{U}$, khi đó $\vec{U}$ được phân tích một cách duy nhất theo cơ sở $\vec{i}$, $\vec{j}$ ($\vec{i}$, $\vec{j}$ là véc tơ đơn vị tương ứng trên Ox, Oy) và giả sử phân tích đó có dạng $\vec{U}=m.\vec{i}+n.\vec{j}$. Cặp số thực (m; n) được gọi là tọa độ của $\vec{U}$, m là hoành độ, n là tung độ và được kí hiệu: $\vec{U}(m;n)$.

Véc tơ $\vec{0}$ có tọa độ (0; 0) và kí hiệu: $\vec{0}(0;0)$.

Cho điểm M trong hệ tọa độ Oxy, khi đó ta xác định được $\overrightarrow{OM}$ và giả sử $(x_o; y_o)$ là tọa độ của $\overrightarrow{OM}$. Khi đó ta nói $(x_o; y_o)$ là tọa độ của điểm M và kí hiệu $M(x_o; y_o)$.

Công thức tìm tọa độ của một véc tơ theo tọa độ các đầu mút của nó

Cho hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$; theo định nghĩa, ta có:

$$\overrightarrow{OA}=x_1.\vec{i}+y_1.\vec{j} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{OB}=x_2.\vec{i}+y_2.\vec{j}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1).\vec{i}+(y_2-y_1).\vec{j} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2-x_1;\,y_2-y_1).$$

Biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ

Cho hai véc tơ $\vec{U}(x_1; y_1)$ và $\vec{V}(x_2; y_2)$, ta có:

$$\vec{U}=\vec{V} \quad \Leftrightarrow \quad x_1=x_2 \quad \text{và} \quad y_1=y_2.$$

Nếu $\vec{U}+\vec{V}=\vec{W}$ thì $\vec{W}(x_1+x_2;\,y_1+y_2)$.

Nếu $\vec{W'}=m.\vec{U}$ thì $\vec{W'}(mx_1;\,my_1)$.

Độ dài của véc tơ $\vec{U}$ được xác định bởi: $U=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

Khoảng cách giữa hai điểm A, B là độ dài của véc tơ $\overrightarrow{AB}$.

Điều kiện đồng phương của hai véc tơ dưới dạng tọa độ

Cho hai véc tơ $\vec{U}(x_1; y_1)$ và $\vec{V}(x_2; y_2)$ khác 0. Để $\vec{U} \parallel \vec{V}$ cần và đủ để tồn tại số thực m sao cho:

$$\vec{U} = m\vec{V} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = mx_2 \quad \text{và} \quad y_1 = my_2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 : x_2 = y_1 : y_2.$$

Tìm tọa độ điểm chia một đoạn thẳng theo một tỉ số cho trước

Cho đoạn AB, trong đó $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ và số $k \neq 0$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ và kí hiệu $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Nếu (x; y) là tọa độ của M, thì ta có:

$$\overrightarrow{MA}(x_1 - x;\ y_1 - y), \qquad \overrightarrow{MB}(x_2 - x;\ y_2 - y)$$

Từ định nghĩa ta suy ra: $x_1 - x = k(x_2 - x)$ và $y_1 - y = k(y_2 - y)$

Trong trường hợp M là trung điểm của AB, ta có: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

15. DÙNG VÉC TƠ TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỰC CHUẨN ĐỂ GIẢI TOÁN

Ví dụ 1. Cho $\vec{U}(1; -2)$ và $\vec{V}(x; 5)$. Tìm x để $\vec{U} \parallel \vec{V}$.

Giải

Theo điều kiện đồng phương, ta có: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{5}{-2} \quad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{5}{2}$.

Ví dụ 2. Cho hai điểm A(2; 3) và B(−1; −4). Tìm trên trục AB điểm C sao cho $\overline{BC} = 2\overline{AC}$.

Giải

Kí hiệu (x; y) là tọa độ của C, khi đó: $AC = (x - 2; y - 3)$, $BC = (x + 1; y + 4)$

Từ điều kiện bài toán ta có:

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 2(x - 2) \quad \text{và} \quad y + 4 = 2(y - 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \text{và} \quad y = 10.$$

Ví dụ 3. Cho hai điểm A(a; 0) và B(b; c) (a, b, c khác 0). Tìm tọa độ véc tơ chỉ phương của tia phân giác của góc AOB (O là gốc tọa độ).

Giải

Trong tam giác AOB có: $AO = |a|$, $OB = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Ta đặt $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{|a|}.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}\overrightarrow{OB}$.

Tam giác OA'B' cân tại O, nên trung tuyến OM là phân giác của góc AOB và $\overrightarrow{OM}\left(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}; \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)$ là véc tơ phải tìm.

16. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho $\vec{U}(1; 1)$. Tìm $\vec{V}$, biết $\vec{U} \parallel \vec{V}$ và $V = 2U$.

ĐS: $\vec{V_1}(2; 2)$, $\vec{V_2}(-2; -2)$.

2. Cho $\vec{U}(1; 1)$. Tìm $\vec{V}$, biết $\vec{U} \uparrow\uparrow \vec{V}$ và $V = 2U$.

ĐS: $\vec{V}(2; 2)$.

3. Cho $\vec{U}(3; 2)$ và $\vec{V}(5; 8)$.

i) Chứng minh rằng: $\vec{U}$ và $\vec{V}$ không đồng phương.

ii) Đặt $\vec{W} = (2 - x)\vec{U} + (3 + y)\vec{V}$. Xác định x và y để $\vec{W} \parallel \vec{U} + \vec{V}$.

4. Cho các véc tơ $\vec{U}(1; -1)$ và $\vec{V}(-3; 2)$.

i) Chứng minh rằng: $\vec{U}$ và $\vec{V}$ không đồng phương.

ii) Đặt $\vec{W} = x\vec{U} - 2\vec{V}$. Xác định x để $\vec{W} \parallel \vec{U} + \vec{V}$.

Hướng dẫn: $\vec{W}(x + 6; -x - 4)$, $\vec{U} + \vec{V} = \vec{W'}(-2; 1)$ ta có hệ:

$$\begin{cases} x + 6 = -2t \\ -x - 4 = t \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

5. Cho $\vec{U}(2; -1)$ và $\vec{V}(1; -2)$. Ta đặt: $\vec{W} = x\vec{U} + y\vec{V}$.

Hãy tìm x và y sao cho $\vec{W} \parallel \vec{U} - \vec{V}$ và $|\vec{W}| = |\vec{U} + \vec{V}|$.

Hướng dẫn: $\vec{W}(2x + y; -x - 2y)$ và $W = 3\sqrt{2}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = t \\ -x - 2y = -t \\ (2x + y)^2 + (-x - 2y)^2 = (3\sqrt{2})^2 \end{cases}$

6. Cho ba điểm A(5; 2), B(-4; 3), C(2; 1).

i) Chứng minh rằng: A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

ii) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC.

iii) Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC.

ĐS: ii) (1; 2); iii) AM = 6.

7. Cho ba điểm A(0; -3), B(2; x), C(3; 0).

i) Tìm x để ba điểm đã cho thẳng hàng.

ii) Tìm tọa độ điểm D sao cho A và C chia điều hòa đoạn BD.

ĐS: i) x = -1; ii) D(6; 3).

8. A(2; 0) và B(0; -2) là hai đỉnh liên tiếp của một hình vuông ABCD. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại.

9. M(2; 1), N(5; 3), P(3; -4) là trung điểm của ba cạnh tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác.

10. A(1; -1), B(5; 3), D(0; -4) là ba đỉnh của một hình bình hành. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư (Các đỉnh hình bình hành không nhất thiết được đánh số theo cách thông lệ).

11. A($2\sqrt{3}$; 0) là một trong ba đỉnh của tam giác đều ABC mà gốc tọa độ là trọng tâm của nó. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

12. A($\sqrt{3}$; 0) và B(0; $-\sqrt{3}$) là hai đỉnh của một tam giác đều. Tìm tọa độ đỉnh C.

13. A(1; 5), B(4; 1), C(-4; -5) là ba đỉnh của tam giác ABC. Ta kẻ phân giác AD (D thuộc cạnh BC).

i) Tìm tọa độ D. ii) Tính độ dài AD.

14. Cho hai điểm A(3; 4) và B(5; 0). Tìm véc tơ chỉ phương của tia phân giác góc AOB (O là gốc tọa độ).

ĐS: Là véc tơ OM(4; 2) (M là trung điểm của đoạn AB).

15. Cho hai điểm A(4; 0) và B(-9; 0). Hãy tìm trên trục Oy điểm C sao cho tam giác ABC vuông tại C.

16. Cho ba điểm A(a; 0), B(b; 0), C(0; c). Với điều kiện nào của a, b, c thì tam giác ABC:

i) Vuông tại C ? ii) Vuông tại A ? iii) Đều ?

17. Cho hai điểm A(2; -2) và B(1; 1). Tìm tọa độ của véc tơ chỉ phương của tia phân giác góc AOB (O là gốc tọa độ).

18. Cho ba điểm A(1; -1), B(2; 8), C(0; y).

i) Tìm y để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

ii) Với y đã xác định ở phần i); hãy tìm điểm D sao cho C và D chia điều hòa đoạn AB.

19. Cho ba điểm A(a; 0), B(b; 0), C(0; c) (a, b, c khác 0). Tìm tọa độ tâm đường tròn đi qua 3 điểm đã cho.

20. Cho ba điểm A(3; 0), B(−3; 0), C(0; 5). Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

21. Cho n điểm $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, ..., $A_n(x_n; y_n)$ và n số thực $m_1, m_2, \dots, m_n$ $(m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0)$. Tìm tọa độ điểm X sao cho:

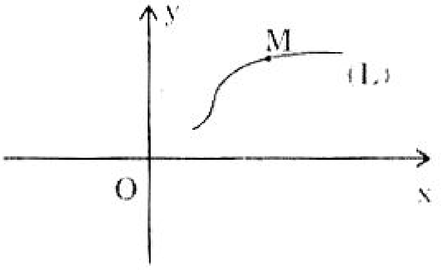
$$m_1 \overrightarrow{XA_1} + m_2 \overrightarrow{XA_2} + m_3 \overrightarrow{XA_3} + \dots + m_n \overrightarrow{XA_n} = \vec{0}$$

Sử dụng kết quả trên, hãy giải bài toán sau:

A(1; 5), B(4; −1), C(−4; −5) là ba đỉnh tam giác ABC. Đặt $m_1 = AB$, $m_2 = BC$, $m_3 = CA$. Tìm tọa độ điểm X sao cho: $m_1 \overrightarrow{XC} + m_2 \overrightarrow{XA} + m_3 \overrightarrow{XB} = \vec{0}$

và chứng tỏ X là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

17. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG CONG



Cho một đường cong (L) trong hệ tọa độ Oxy. Với mỗi điểm bất kì M(x; y) ∈ (L), các tọa độ x, y của M phụ thuộc vào nhau theo một quy tắc xác định và với những điểm không thuộc (L) thì các tọa độ đó không tuân theo quy tắc như vậy. Quy tắc chỉ ra sự phụ thuộc lẫn nhau của các tọa độ x và y của mọi điểm M ∈ (L) được gọi là phương trình đường (L) và được kí hiệu f(x; y) = 0 hoặc f(x; y) = C (C là hằng số) hoặc f(x; y) = g(x; y) hoặc φ(t) = 0 và ψ(t) = 0 (t là tham số). Rõ ràng phương trình của (L) phụ thuộc vào bản chất của nó. Dưới đây ta sẽ xét một số phương trình đường cong quen thuộc.

Họ đường cong là một tập hợp không rỗng các đường cong có cùng một tính chất và được biểu diễn bằng phương trình chứa tham số. Mỗi giá trị của tham số tương ứng với một đường cong trong họ. Ta thường kí hiệu f(x, y, m) = 0, trong đó (x; y) là tọa độ của điểm thuộc đường cong; m là tham số mà ứng với mỗi giá trị của nó cho ta một đường cong cụ thể. Điểm $Q(x_0; y_0)$ được gọi là điểm cố định của họ đường cong, nếu Q thuộc mọi đường cong trong họ. Từ định nghĩa ta suy ra nếu f(x, y, m) = 0 là phương trình của họ đường cong đi qua Q, thì $f(x_0, y_0, m) = 0$ (*) nghiệm đúng với mọi giá trị của m mà họ đường cong tồn tại. Phương trình (*) thực chất là một đồng nhất thức đối với m và do đó nó tương đương với một hệ phương trình chứa ẩn là x_0, y_0.

18. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN TRONG HỆ TRỰC CHUẨN

Phương trình đường thẳng

Cho véc tơ $\vec{a}(\alpha; \beta)$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cùng phương với $\vec{a}$.

- Cách lập: kí hiệu N(x; y) là một điểm bất kì để N ∈ (d) cần và đủ để:

$$\overrightarrow{MN} \,//\, \vec{a}(\alpha; \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \text{ sao cho } \overrightarrow{MN} = t.\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x - x_0 = \alpha t \quad \text{và} \quad y - y_0 = \beta t \qquad (*)$$

với t là số thực bất kì.

(*) được gọi là phương trình tham số của (d). Nếu khử t trong (*) ta được:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} \qquad (**)$$

(**) được gọi là phương trình chính tắc của (d).

Nếu $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt, thì phương trình đường thẳng M_1M_2 có dạng:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (***)$$

Trường hợp $y_1 = 0$ và $x_2 = 0$, thì (***) có dạng $\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_2} = 1$ và được gọi là phương trình đoạn chắn.

Phương trình (*) còn được viết dưới dạng $y - y_0 = k(x - x_0)$, trong đó $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$ được gọi là hệ số góc của đường thẳng và dạng phương trình đó được gọi là phương trình độ nghiêng.

Phương trình đường tròn

Cho đường tròn tâm $w(x_0; y_0)$, bán kính R. Lập phương trình đường tròn.

Ta kí hiệu M(x; y) và một điểm bất kì và M ∈ (w; R)

$$\Leftrightarrow \quad wM = R \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (*)$$

Ta gọi (*) là phương trình chính tắc của đường tròn.

Hệ quả:

(*) có thể được viết dưới dạng: $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$.

Ngược lại nếu tập hợp điểm M mà tọa độ là nghiệm phương trình

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad (**) \qquad \text{với } a^2 + b^2 - c > 0$$

lập thành một đường tròn tâm (a; b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Phương trình (**) được gọi là phương trình tổng quát của đường tròn.

19. DÙNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN

Ví dụ 1. M(2; 1), N(5; 3), P(3; −4) là trung điểm của ba cạnh tam giác ABC. Lập phương trình các đường thẳng chứa các cạnh tam giác.

Giải

Giả sử M là trung điểm của AB, N là trung điểm của AC. Khi đó $\overrightarrow{MN}(3; 2)$ là véc tơ chỉ phương của BC. BC đi qua P và vì vậy phương trình của BC có dạng:

$$x - 3 = 3t, \qquad y + 4 = 2t \qquad (t \in R).$$

Tương tự ta có phương trình AC và AB:

$$x - 5 = t', \qquad y - 3 = 5t' \qquad (t' \in R);$$

$$x - 2 = 2u, \qquad y - 1 = 7u \qquad (u \in R).$$

Ví dụ 2. Cho hai điểm A(2; 3) và B(0; 5). Lập phương trình đường tròn đường kính AB.

Giải

Tâm đường tròn là điểm (1; 4), bán kính $R = \sqrt{2} \Rightarrow$ phương trình đường tròn đường kính AB có dạng: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

Giải

Ta đặt $a = 2$, $b = 3$, $c = 0 \Rightarrow$ tâm đường tròn là điểm (2; 3) và bán kính $R = \sqrt{13}$.

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB = 2a (a > 0) và số k > 0. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 = k \quad (k > 2a^2)$.

Giải

Ta chọn hệ tọa độ sao cho A(a; 0) và B(−a; 0). Kí hiệu (x; y) là tọa độ của M.

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow (a - x)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = k$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2a^2 = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{k}{2} - a^2$$

Đây là phương trình của một đường tròn: tâm là trung điểm của đoạn AB, bán kính $R = \sqrt{\frac{k}{2} - a^2}$.

Ví dụ 5. Cho hai đường thẳng (d), (d') cắt nhau tại O và các điểm M, N lần lượt trên hai đường thẳng đó. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn MN.

khi M và N thay đổi sao cho đường thẳng MN luôn song song với một phương cho trước.

Giải

Ta chọn hệ tọa độ Oxy sao cho (d) trùng với Ox, O là gốc tọa độ. Trong hệ tọa độ (d') có phương trình $y = kx$ (k là số thực cho trước). Nếu $M \in Ox$, $N \in (d')$, thì tọa độ các điểm đó được kí hiệu $(m, 0)$ và (n, kn) (m, n là các số thực). Ta kí hiệu $(\alpha; \beta)$ là tọa độ của véc tơ chỉ phương cho trước; theo giả thiết ta có: $n - m = t\alpha$, $kn = t\beta$ (*). Ta kí hiệu $I(x_0; y_0)$ là trung điểm của đoạn MN $\Rightarrow$ $x_0 = \dfrac{m + n}{2}$, $y_0 = \dfrac{kn}{2}$ (**).

Bằng cách khử m và n từ (*) và thay vào (**) ta được: $x_0 = \dfrac{2\beta - k\alpha}{2k}t$, $y_0 = \dfrac{\beta}{2}t$ với $t \in R$ và điều đó chứng tỏ tập I là đường thẳng có phương trình:

$$x = \frac{2\beta - k\alpha}{2k}t, \qquad y = \frac{\beta}{2}t \qquad (t \in R).$$

Ví dụ 6. Trên đoạn AC ta lấy điểm B và dựng các hình vuông ABMN và BCEF nằm về cùng một phía với AC. Gọi P là giao điểm của các đường thẳng CM và EN. Chứng minh rằng khi B thay đổi trên đoạn AC, thì đường thẳng PB đi qua một điểm cố định.

Giải

Ta chọn hệ tọa độ sao cho $A(0; 0)$, $C(1; 0)$, $B(m; 0)$ $(0 < m < 1)$. Khi đó $M(m; m)$, $N(0; m)$, $E(1; 1 - m)$.

Phương trình các đường thẳng CM và NE có dạng:

$$y = \frac{m}{m - 1}(x - 1), \qquad y = (1 - 2m)x + m.$$

Tọa độ của P là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = \dfrac{m}{m-1}(x - 1) \\ y = (1 - 2m)x + m \end{cases}$

Giải hệ phương trình đó ta được:

$$x = \frac{m^2}{2m^2 - 2m + 1}, \qquad y = \frac{m(m - 1)}{2m^2 - 2m + 1}.$$

Đường thẳng PB có phương trình:

$$\frac{x - m}{1 - 2m} = \frac{y}{-1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2m - 1}(x - m).$$

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà PB đi qua, khi đó:

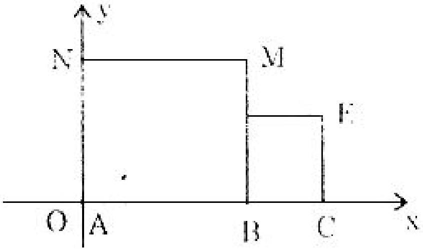
$$y_0 = \frac{1}{2m-1}(x_0 - m) \text{ nghiệm đúng } \forall m \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow \quad (2m-1)y_0 = x_0 - m \quad \text{đúng với } \forall m \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow \quad (2y_0 + 1)m = x_0 + y_0 \quad \text{đúng } \forall m \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 2y_0 = 0 \quad \text{và} \quad x_0 + y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2}, \; y_0 = -\frac{1}{2}.$$



Điểm cố định phải tìm là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 7. Cho họ đường tròn $(x - m)^2 + (y - 3)^2 = m^2 + 4$ (m là tham số tùy ý). Tìm điểm cố định mà họ này đi qua.

Giải

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ đường tròn đi qua, khi đó:

$$(x_0 - m)^2 + (y_0 - 3)^2 = m^2 + 4 \text{ nghiệm đúng } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^2 - 2mx_0 + m^2 + (y_0 - 3)^2 = m^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2mx_0 = 4 - (y_0 - 3)^2 - x_0^2 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = 0 \quad \text{và} \quad y_0 = 5 \quad \text{hoặc} \quad y_0 = 1.$$

Điểm cố định cần tìm là: (0; 5) và (0; 1).

Ví dụ 8. Tìm họ đường thẳng có phương song song với véc tơ $\vec{U}(1; -2)$.

Giải

Rõ ràng hệ số góc k của đường thẳng bằng –2, vì vậy phương trình đường thẳng có dạng $y = -2x + m$ và đó cũng là họ đường thẳng phải tìm.

Ví dụ 9. Tìm họ đường tròn có tâm thuộc đường thẳng: $y = x - 1$ và bán kính $R = 1$.

Giải

Kí hiệu $(m; m - 1)$ là tọa độ của điểm bất kì thuộc đường thẳng đã cho, khi đó nó cũng là tâm của đường tròn bất kì trong họ.

Ta có $(x - m)^2 + (y - m + 1)^2 = 1$ và phương trình đó cũng chính là họ đường tròn phải tìm.

20. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho hai điểm A(3; 4) và B(5; 0). Lập phương trình đường thẳng chứa tia phân giác của góc AOB (O là gốc tọa độ).

Hướng dẫn: Tìm véc tơ chỉ phương của tia phân giác. Phương trình cần tìm có dạng $y = 0,5x$.

2. Cho hai điểm A(2; −2) và B(1; 1). Lập phương trình đường thẳng chứa tia phân giác của góc AOB (O là gốc tọa độ).

ĐS: $x = \sqrt{2}\,t$, $y = 0$ (t là số thực tùy ý).

3. Cho các điểm A(3; 0) và B(0; 4).

i) Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận O làm trọng tâm (O là gốc tọa độ).

ii) Lập phương trình đường thẳng AC và BC.

Hướng dẫn: i) Tọa độ C được xác định từ: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

ii) ***ĐS:*** AC: $x - 3 = 6t$; $y = 5t$, BC: $x = t'$; $y - 4 = 3t'$.

4. Cho đoạn AB = 2a và số k. Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Hướng dẫn: Chọn hệ tọa độ sao cho A(a; 0), B(−a; 0). Tập M là đường thẳng: $x = -\frac{k}{4a}$.

5. Cho đoạn AB = 2a và số k > 0. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\frac{MA}{MB} = k$.

Hướng dẫn: Chọn hệ tọa độ như bài 4. Tập M là đường thẳng x = 0, nếu k = 1 và đường tròn:

$$x^2 + y^2 + 2ax\frac{1 + k^2}{k^2 - 1} + a^2 = 0, \quad \text{nếu } k \neq 1.$$

6. Cho hình vuông ABCD trong đó A(0; 0), B(1; 0), C(1; 1), D(0; 1). Tìm tập hợp trọng tâm của các tam giác đều MNP nội tiếp trong hình vuông sao cho M ∈ AB, N ∈ AD, P ∈ BC.

7. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

8. Cho đoạn thẳng AB = a. Tìm tập hợp các điểm C và D sao cho $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ và $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{BC}$.

Hướng dẫn: Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho A(0; 0) và B(a; 0). Kí hiệu (x; y) và (x'; y') là tọa độ các điểm D và C (x' = x + a; y' = y).

Từ $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{BC}$

$$\Leftrightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{AC^2 + BD^2}{AB^2 + BC^2} = \frac{(x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2}{a^2 + x^2 + y^2} = 2$$

⇒ Tập hợp C là đường tròn $(x')^2 + y'^2 = 2a^2$.

Tập hợp D là đường tròn $(x + a)^2 + y^2 = 2a^2$.

9. Trên đoạn AC ta lấy điểm B và dựng các tam giác đều ABM và BCN cùng phía với đường thẳng AC. Gọi P là giao điểm các đường thẳng CM và AN. Chứng minh rằng khi B thay đổi trên đoạn AC, thì đường thẳng PB đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn: Xem cách giải ví dụ 6.

10. Trên đoạn AC ta lấy điểm B và dựng các tam giác cân ABM (MB = MA) và BCN (NB = NC) cùng phía với đường thẳng AC sao cho các tam giác đó đồng dạng. Gọi D là giao điểm của các đường thẳng CM và AN. Chứng minh rằng khi B thay đổi trên đoạn AC, thì đường thẳng BD đi qua một điểm cố định.

11. Cho tam giác ABC và CM là trung tuyến của tam giác đó. Một đường thẳng (d) // CM cắt các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng tại A_1, B_1, C_1.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = 2\overrightarrow{CM}$.

Hướng dẫn: Chọn hệ tọa độ sao cho A(a; 0), B(b; 0), C(0; c). Trong hệ tọa độ đó đường thẳng (d) có phương trình:

$$y = -\frac{2c}{a+b}x + m; \quad \text{m là tham số tùy ý}$$

Hãy tìm tọa độ các điểm A_1, B_1, C_1.

12. Cho họ đường tròn: $(x - m)^2 + (y + m)^2 = 2m^2 + 18$ (m là tham số tùy ý). Tìm điểm cố định mà họ này đi qua.

ĐS: (3; 3) và (-3; -3)

13. Cho họ đường thẳng: $y = (m - 2)x + 2m - 5$ (m là tham số tùy ý). Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng đó đi qua.

ĐS: (-2; -1).

14. Cho các điểm A(1; 2) và B(-1; 0). Tìm họ đường tròn đi qua A và B.

ĐS: $x^2 + y^2 - 2mx - 2(1 - m)y - 2m - 1 = 0$, m là tham số.

15. Tìm họ đường tròn có bán kính R = 2 và đi qua điểm M(0; 1).

ĐS: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = 4$, trong đó m là tham số thỏa mãn điều kiện:

$$0 \le |m| \le 2, \quad n = 1 + \sqrt{4 - m^2} \quad \text{hoặc} \quad n = 1 - \sqrt{4 - m^2}$$

16. Tìm họ đường tròn có R = 3 và tâm thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

21. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VỀ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC (CUNG) α VỚI $0 \le \alpha \le 180^\circ$

Định nghĩa

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho nửa đường tròn (w) đường kính AB, trong đó A(1; 0), B(-1; 0) và nằm phía trên trục Ox (tung độ của mọi điểm thuộc (w) không âm). Với mỗi góc (cung) α ($0 \le \alpha \le 180°$) ta xác định điểm M trên (w) sao cho góc AOM = α (cung OM). Kí hiệu $(x_\alpha; y_\alpha)$ là toạ độ của M, ta định nghĩa:

$$\sin\alpha = y_\alpha, \quad \cos\alpha = x_\alpha, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}\ (x_\alpha \neq 0), \quad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}\ (y_\alpha \neq 0)$$

Các tính chất cơ bản của các hàm lượng giác của góc (cung) α

a) $0 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\cos\alpha \neq 0), \qquad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\sin\alpha \neq 0)$$

b) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\qquad \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{cotg}\alpha = 1$,

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

c) $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\quad \mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

d) Nếu $90° - \alpha > 0$, thì $\quad \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$,

$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{cotg}\alpha$.

Bảng giá trị của hàm số lượng giác của các góc đặc biệt

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotg	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$

22. VẬN DỤNG CÁC ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT ĐỂ GIẢI TOÁN

Chứng minh các đẳng thức

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với $0 \le \alpha \le 180°$, thì:

$$\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha.$$

Giải

Từ $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) =$

$= (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha).1 = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$. (đpcm).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với $0 < \alpha < 180^\circ$ và $\alpha \neq 90^\circ$, thì:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha}}.$$

Giải

Ta có: $$\frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\sin\alpha.\cos\alpha}} = \sin^2\alpha.$$

Vì $\sin\alpha > 0$ nên ta được: $\sqrt{\dfrac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha}} = \sin\alpha.$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ và $\alpha \neq 90^\circ$, thì:

$$\frac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha} \qquad (1)$$

Giải

$(1) \Leftrightarrow (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ và đó là đpcm.

Rút gọn biểu thức hoặc tính giá trị của biểu thức

Ví dụ 4. Cho biết $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ $(0 \leq \alpha \leq 180^\circ)$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = (1 + \cos\alpha)(1 + \text{tg}\alpha).$$

Giải

Từ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ hoặc $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

- Trường hợp $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ và

$$P = \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3} + \frac{11\sqrt{2}}{12}$$

- Trường hợp $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}\sqrt{2} \Rightarrow \text{tg}\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ và

$$P = \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3} - \frac{11\sqrt{2}}{12}.$$

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức: $\sqrt{(1+\text{tg}\alpha)^2+(1-\text{tg}\alpha)^2}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$.

Giải

$$\sqrt{(1+\text{tg}\alpha)^2+(1-\text{tg}\alpha)^2} = \sqrt{1+2\text{tg}\alpha+\text{tg}^2\alpha+1-2\text{tg}\alpha+\text{tg}^2\alpha}$$

$$= \sqrt{2(1+\text{tg}^2\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{|\cos\alpha|}.$$

Giải phương trình để tìm giá trị hàm số lượng giác của α hoặc tìm α

Ví dụ 6. Tìm α, biết $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ và $0 \le \alpha \le 90^\circ$.

Giải

Nhìn vào bảng giá trị các góc đặc biệt, ta suy ra $\alpha = 30^\circ$.

Ví dụ 7. Tìm α, biết $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $0 < \alpha < 180^\circ$.

Giải

Nhìn vào bảng giá trị các góc đặc biệt, ta được $\alpha = 135^\circ$.

Ví dụ 8. Tìm α, biết $\cos\alpha = \sin2\alpha.\cos\alpha$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

Giải

$$\cos\alpha = \sin2\alpha.\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha(1-\sin2\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \quad \text{hoặc} \quad 1-\sin2\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$1-\sin2\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin2\alpha = 1 \Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

23. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

- **Chứng minh các đẳng thức:** (Tất cả các bài toán dưới đây nếu không giả thiết gì thêm, thì ta coi $0 \le \alpha \le 180^\circ$)

1. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq 0, 180^\circ)$ **2.** $\frac{\sin\alpha+\text{tg}\alpha}{1+\cos\alpha} = \text{tg}\alpha$

3. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)+1 = 3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$

4. $\text{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \text{cotg}^2\alpha.\cos^2\alpha$

5. $\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\sin\alpha\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{4\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$

6. $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+1}$ **7.** $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\alpha \neq 0, 180^\circ)$

- **Chứng minh rằng trong một tam giác vuông ABC ($C = 90^\circ$), thì các hệ thức từ 8 – 13 là đúng:**

8. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$

9. $\dfrac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \text{tg}A = \text{cotg}B$

10. $\sin 2A = \sin 2B$

11. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

12. $\sin A < \cos A \quad \Leftrightarrow \quad A < 45^\circ$.

Hướng dẫn: Dùng định nghĩa để khảo sát các giá trị của sinA và cosA.

13. $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} > \sin A + \sin B > 1$

Hướng dẫn: Từ $\sin A > \sin^2 A$ ta suy ra: $\sqrt{\sin A} > \sin A$

và $\sin A + \sin B > \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 A + \cos^2 A$.

14. Chứng minh rằng nếu các góc A, B của tam giác vuông ABC ($\hat{C} = 90^\circ$) thỏa mãn điều kiện: $\sin A + \sin B = \sqrt{2}$, thì tam giác đó cân.

15. Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} = \frac{4}{\sin A + \sin B}$$ thì tam giác đó cân.

16. Chứng minh rằng các góc của tam giác ABC thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\sin A + \cos A + \sin B + \cos B + \sin C + \cos C < 3\sqrt{2}.$$

Hướng dẫn: Xuất phát từ các bất đẳng thức:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 \le 3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

và $$(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \le 3(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

Cộng 2 bất đẳng thức ta được:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \le 9.$$

Mặt khác: $(\sin A + \sin B + \sin C + \cos A + \cos B + \cos C)^2 <$

$< 2[(\sin A + \sin B + \sin C)^2 + (\cos A + \cos B + \cos C)^2] \le 18.$

17. Chứng minh rằng nếu A và B là các góc nhọn của tam giác ABC thì

$$\sin A + \cos A + \sin B + \cos B > 2.$$

- **Rút gọn hoặc tính giá trị của biểu thức:**

18. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$ biết $\text{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

Hướng dẫn: Chia cả tử lẫn mẫu cho cosα.

19. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$ biết $\text{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 18.

20. Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = a$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$. Hãy tính giá trị của các biểu thức:

$P = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$; $\quad Q = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$; $\quad R = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ theo a.

21. Cho $tg\alpha + cotg\alpha = a$ và $0 < \alpha < 90^\circ$. Tính $tg^4\alpha + cotg^4\alpha$ theo a.

22. Rút gọn biểu thức: $\dfrac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}$ không còn phụ thuộc α. ***ĐS:*** $\dfrac{2}{3}$.

23. Rút gọn biểu thức $\dfrac{\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}}$ với $0 < \alpha < 90^\circ$

24. Tính tgα, biết: $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{5}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$.

25. Tính tích số: $P = tg1^\circ.tg2^\circ.tg3^\circ...tg87^\circ.tg88^\circ.tg89^\circ$.

26. Tính tổng: $\cos0^\circ + \cos1^\circ + \cos2^\circ + \cos3^\circ + ... + \cos180^\circ$.

27. Tính tổng: $\cos1^\circ + \cos3^\circ + \cos5^\circ + ... + \cos179^\circ$.

- **Giải phương trình để tìm giá trị các hàm số lượng giác của góc α hoặc góc α:**

28. Tìm α, biết: $tg3\alpha = 1$ và $0 < \alpha < 90^\circ$.

29. Tìm α, biết: $tg(2\alpha + 60^\circ) = -1$ và $0 < \alpha < 90^\circ$.

30. Tìm α, biết: $\cos(30^\circ - \alpha) = 0$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

31. Tìm α, biết: $\sin(30^\circ + \alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

32. Tìm α, biết: $\sin(135^\circ - 2\alpha) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

33. Tìm α, biết: $3\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

34. Tìm α, biết: $\sin^2\alpha - (1 + \sqrt{3})\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{3}\cos^2\alpha = 0$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$

35. Tìm α, biết: $\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

36. Tìm α, biết: $\cos^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

37. Tìm α, biết: $\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha = \dfrac{5 - \sqrt{3}}{2}$ và $0 \le \alpha \le 180^\circ$.

38. A, B là các góc của tam giác ABC. Tính sinA và sinB, biết rằng:

$$3\sin^2A + 2\sin^2B = 1 \quad \text{và} \quad 3\sin A.\cos A = 2.\sin B.\cos B.$$

Hướng dẫn: Từ $3\sin A\cos A = 2\sin B\cos B$

$$\Rightarrow \quad 9\sin^2A\cos^2A = 4\sin^2B\cos^2B$$

$$\Rightarrow \quad 9\sin^2A(1 - \sin^2A) = 4\sin^2B(1 - \sin^2B).$$

Đặt $x = \sin^2A$, $y = \sin^2B$; ta có hệ:

$$3x + 2y = 1 \quad \text{và} \quad 9x(1 - x) = 4y(1 - y) \quad (x < 1 \text{ và } y > 0).$$

Chương II

CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG HÌNH HỌC

24. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC TƠ TRONG MẶT PHẲNG

Định nghĩa

Cho hai véc tơ $\vec{U}$, $\vec{V}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{U}$, $\vec{V}$ là số thực bằng: $|\vec{U}|.|\vec{V}|.\cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$ và kí hiệu: $\vec{U}.\vec{V}$

$$\vec{U}.\vec{V} = |\vec{U}|.|\vec{V}|\cos(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$$

Từ định nghĩa ta suy ra: $|\vec{U}.\vec{V}| \le |\vec{U}|.|\vec{V}|$

Nếu $\vec{U} = \vec{0}$ $(\vec{V} = \vec{0})$ thì $\vec{0}.\vec{V} = 0$ $\quad (\vec{U}.\vec{0} = 0)$

Tính chất

1) $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$ (tính giao hoán)

2) $(m\vec{U}).\vec{V} = m(\vec{U}.\vec{V})$, m là số thực (tính kết hợp)

3) $\vec{U}.(\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$ (tính phân phối)

4) $|\vec{U}| = \sqrt{\vec{U}.\vec{U}}$

5) Nếu $\vec{U}$, $\vec{V}$ khác $\vec{0}$, thì $\vec{U}.\vec{V} > 0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$ nhọn;

$\vec{U}.\vec{V} < 0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$ tù;

$\vec{U}.\vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{U} \perp \vec{V}$.

Các hằng đẳng thức về tích vô hướng

$(\vec{U} + \vec{V})^2 = U^2 + 2\vec{U}.\vec{V} + V^2$;

$(\vec{U} - \vec{V})^2 = U^2 - 2\vec{U}.\vec{V} + V^2$;

$(\vec{U} + \vec{V}).(\vec{U} - \vec{V}) = U^2 - V^2$;

$(\vec{U} + \vec{V} + \vec{W})^2 = U^2 + V^2 + W^2 + 2\vec{U}.\vec{V} + 2\vec{U}.\vec{W} + 2\vec{V}.\vec{W}$.

25. DÙNG TÍCH VÔ HƯỚNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Tích vô hướng của hai véc tơ có thể dùng để giải một số dạng toán sau:

Tính độ dài đoạn thẳng hoặc khoảng cách giữa hai điểm

Để tính độ dài một đoạn AB, ta cần thực hiện các bước sau:

- Chọn một cặp véc tơ làm cơ sở. Đó là cặp véc tơ có độ dài xác định và góc tạo bởi chúng xác định. Cặp véc tơ cơ sở luôn tồn tại trong giả thiết của bài toán. Xem AB là một véc tơ và biểu thị nó qua cơ sở đã chọn.
- Sử dụng công thức tính tích vô hướng của chính $\overrightarrow{AB}$ và phối hợp với các hằng đẳng thức về tích vô hướng.
- Khoảng cách giữa hai điểm là độ dài đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có BC = a, AC = b, AB = c. Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác.

Giải

Ta chọn cơ sở là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, khi đó ta có:

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad 4AM^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Ta lại có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, nên $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \quad 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$$

Từ kết quả trên, ta tính được: $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ (*)

Ta gọi (*) là công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác.

Ví dụ 2. B, C, D là ba điểm theo thứ tự cùng nằm trên một đường thẳng sao cho BC = a, CD = b. Về một phía với đường thẳng BD ta dựng các tam giác đều BCA và CDE. Tính khoảng cách giữa hai trọng tâm của hai tam giác đó.

Giải

Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và CDE, xuất phát từ: $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{CG'} - \overrightarrow{CG}$, trong đó: $\overrightarrow{CG'} = \frac{1}{3}(CD + CE)$, $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$,

ta suy ra: $GG'^2 = (\overrightarrow{CG'} - \overrightarrow{CG})^2 = CG'^2 + CG^2 - 2\overrightarrow{CG'}.\overrightarrow{CG}$

Ta có $\overrightarrow{CG'} = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{CG} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\overrightarrow{CG'}.\overrightarrow{CG} = -\frac{ab}{6}$ $\Rightarrow$ $GG' = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}$.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Trên đường thẳng BC ta lấy điểm D và đặt $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$. Tính độ dài AD theo a, b, c, k.

Hướng dẫn: Xuất phát từ: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = k^2a^2 + c^2 - 2k\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$$

trong đó: $2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = a^2 + c^2 - b^2$ nên $AD = \sqrt{k^2a^2 + c^2 - k(a^2 + c^2 - b^2)}$.

2. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ $(b > c)$. Tính độ dài đường phân giác trong AD và đường phân giác ngoài AE của tam giác.

Hướng dẫn: Dùng kết quả bài 1 với $k = \frac{c}{b+c}$ hoặc $k = -\frac{c}{b+c}$.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O, R) có ba cạnh bằng a, b, c. H là trực tâm tam giác. Tính OH theo a, b, c, R.

ĐS: $OH = \sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$.

4. Cho hình vuông ABCD cạnh 1 và điểm M nằm trong hình vuông sao cho MCD là tam giác đều. Tính khoảng cách từ M đến các đỉnh A và B.

ĐS: $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

5. Tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, góc $A = \alpha$. Về phía ngoài tam giác và trên các cạnh AB, AC ta dựng các tam giác đều ABM, ACN. Tính khoảng cách hai trọng tâm của hai tam giác đều đã dựng.

ĐS: $\sqrt{\frac{c^2 + b^2 - 2bc.\cos(\alpha + 60^\circ)}{3}}$.

6. Cho tam giác vuông ABC có $AB = c$, $AC = b$. Về phía ngoài tam giác và trên cạnh BC ta dựng hình vuông tâm O. Tính độ dài AO.

Hướng dẫn: Xuất phát từ:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BA} \quad \Rightarrow \quad AO^2 = BO^2 + c^2 - 2\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA}$$

trong đó: $2\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA} = a.c\sqrt{2}\cos(\alpha + 45^\circ)$, $\alpha = \widehat{ABC}$.

7. Cho ngũ giác đều cạnh a. Tính độ dài đường chéo ngũ giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp nó. (Cho biết $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$).

ĐS: $a.\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 3}{2}}$; $R = a.\sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}}$.

8. Cho tam giác đều ABC cạnh 1 và điểm M cách trọng tâm tam giác một khoảng d. Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo d.

Hướng dẫn: Gọi O là trọng tâm tam giác ABC, xuất phát từ:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \quad \Rightarrow \quad MA^2 = d^2 + OA^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}.$$

Tương tự ta có: $MB^2 = d^2 + OB^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$,

$$MC^2 = d^2 + OC^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}.$$

Cộng các kết quả đó ta được: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3d^2 + 3OA^2$.

Mặt khác: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos 120^{\circ}$

$$\Rightarrow \quad 1 = 3OA^2 \quad \Rightarrow \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3d^2 + 1.$$

9. Cho hình vuông ABCD cạnh 1 và điểm M cách tâm hình vuông một khoảng d. Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ theo d.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 8.

10. Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2A_3...A_n$ có độ dài cạnh là 1 và điểm M cách trọng tâm của đa giác một khoảng d.

Tính tổng $MA_1^2 + MA_2^2 + MA_3^2 + ... + MA_n^2$ theo d.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 8.

11. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác vuông cân ABC ($C = 90^{\circ}$) ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho BM = kMC, CN = kNA, AP = kPB ($k > 0$ cho trước), biết BC = 1. Tính MN và CP theo k.

ĐS: $MN = CP = \dfrac{\sqrt{k^2 + 1}}{k + 1}$.

12. Biết bán kính các đường tròn ngoại tiếp và các cạnh của tam giác là R, a, b, c. Tính khoảng cách giữa 2 tâm đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác.

Hướng dẫn: Gọi I và O lần lượt là tâm đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác. Xuất phát từ công thức:

$$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 2p.\overrightarrow{OI} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB} + c\,\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow 4p^2OI^2 = R^2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2ac.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2bc\,\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$$

$$= R^2(a^2 + b^2 + c^2) + ab(2R^2 - c^2) + ac(2R^2 - b^2) + bc(2R^2 - a^2)$$

$$= 4p^2R^2 - 2pabc$$

trong đó: $2\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2$, $2\,\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\,\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2$,

a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác, $2p = a + b + c \Rightarrow OI = \sqrt{R^2 - \dfrac{abc}{a + b + c}}$.

Tính góc

Tính góc tạo bởi hai véc tơ được thực hiện theo các bước sau:

- Chọn cơ sở và biểu thị các véc tơ cạnh của góc qua cơ sở đó. Trong một số trường hợp hai cạnh của góc là cặp véc tơ cơ sở.
- Dùng công thức tính cos qua tích vô hướng.

Ví dụ 1. Tính các góc của một tam giác theo độ dài ba cạnh.

Giải

Kí hiệu a, b, c là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C. Độ lớn các góc tại các đỉnh đó cũng biểu thị là A, B, C. Xuất phát từ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (*)$$

Hệ thức (*) được gọi là định lý hàm số cos trong tam giác.

Tương tự ta có: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông ABCD. Trên đường chéo BD ta lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{BD} = 4\,\overrightarrow{BM}$; N là trung điểm của cạnh CD. Tính góc AMN.

Giải

Cơ sở của bài toán là $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ và coi cạnh hình vuông bằng 1.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}$,

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + 0,5\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}$.

Ta tính $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM})(\overrightarrow{BC} + 0,5\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}) = 0$ và góc cần tính bằng 90°.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Trên đoạn AC ta lấy điểm B và dựng các hình vuông ABMN, BCPQ nằm về một phía với đường thẳng AC. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AQ và NP.

ĐS: 45°.

2. Cho hình bình hành ABCD thỏa mãn điều kiện: $AC^2.BD^2 = AD^4 + AB^4$

Tính góc nhọn tạo bởi hai cạnh liên tiếp của hình bình hành.

ĐS: 45°.

3. Cho ba véc tơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a} = -1$$

Chứng minh rằng tồn tại hai véc tơ tạo với nhau một góc bẹt.

Hướng dẫn: Từ điều kiện đã cho ta viết lại: $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{c}) = 0$

Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ thì góc tạo bởi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 180°.

Nếu $\vec{a} + \vec{b} = \vec{u}$ và $\vec{a} + \vec{c} = \vec{v}$ khác $\vec{0}$ thì các véc tơ đó vuông góc.

Tương tự $\vec{b} + \vec{c} = \vec{w}$ cũng vuông góc với $\vec{u}$. Trong mặt phẳng không tồn tại ba véc tơ khác không đôi một vuông góc. Điều đó chứng tỏ trường hợp cả ba véc tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ khác không không xảy ra.

4. Cho hình vuông ABCD cạnh AB = 1. Trên cạnh BC ta lấy điểm M và đặt $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Trên cạnh DC ta lấy điểm N và đặt $\overrightarrow{DN} = y\overrightarrow{DC}$.

i) Tính góc MAN theo x và y.

ii) Tìm sự phụ thuộc của x và y để góc đó bằng 45°; 60°.

Hướng dẫn: Chọn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ làm cơ sở, ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}, \qquad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = x + y, \qquad AM = \sqrt{1 + x^2}, \qquad AN = \sqrt{1 + y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x + y}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}} \qquad (\alpha = \widehat{MAN})$$

5. Cho hai véc tơ đơn vị $\vec{a}$, $\vec{b}$ hợp với nhau góc α.

Đặt $\vec{U} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{V} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$. Tính góc tạo bởi hai véc tơ $\vec{U}$ và $\vec{V}$.

ĐS: Kí hiệu β là góc cần tính, khi đó ta có: $\cos\beta = -\dfrac{5\cos\alpha}{\sqrt{169 - 144\cos^2\alpha}}$.

6. Cho tam giác vuông cân ABC (AB = AC); BM và CN là các trung tuyến của tam giác. Tính góc tạo bởi hai trung tuyến đó.

ĐS: Kí hiệu α là góc cần tính, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

7. Cho tam giác đều ABC và điểm O thỏa mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

Tính góc tạo bởi $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$.

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta suy ra: $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ (*)

và $AB^2=BC^2=CA^2$ $\Rightarrow$ $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2$ (**)

Bằng cách thay (*) vào (**) ta được:

$$\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)^2=\left(\overrightarrow{OC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)^2=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2$$

$\Rightarrow$ $9OA^2+43\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}-12OC^2=0$

và $15OA^2-44\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}-20.OC^2=0$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0.$

8. Cho hình chữ nhật ABCD cạnh AB = a, BC = b. Trên đường chéo BD ta lấy điểm O và đặt $\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{BD}$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính $\cos\widehat{MOC}$ theo a, b, k.

Hướng dẫn: Đặt $\alpha=\widehat{MOC}$ và xuất phát từ: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}=OM.OC.\cos\alpha$.

Ta tính $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}$ và OM, OC.

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{1}{2}-k\right)\overrightarrow{BA}-k\overrightarrow{BC},\qquad \overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{BC}-k\overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OC}=-k\left[\left(\frac{1}{2}-k\right)a^2+(1-k)b^2\right];$$

$$OM=\sqrt{k^2b^2+\left(\frac{1}{2}-k\right)^2a^2},\qquad OC=\sqrt{k^2a^2+(1-k)^2a^2}$$

9. Cho tam giác cân ABC (AB = AC = 1) có góc A = 2α. Trên cạnh AB ta lấy điểm M sao cho AM = BC. Tính góc BMC theo α.

Hướng dẫn: Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.2\sin\alpha$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.2\sin\alpha$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}=\cos2\alpha-2\sin\alpha$; $MC=\sqrt{(2\sin\alpha-\cos2\alpha)^2+(\sin2\alpha)^2}$

10. $\vec{U}$, $\vec{V}$ là các véc tơ đơn vị. Tính góc tạo bởi $\vec{U}$, $\vec{V}$ trong các trường hợp sau:

i) $|\vec{U}+\vec{V}| = \sqrt{2}$ ii) $|\vec{U}+\vec{V}| = \sqrt{3}$ iii) $|\vec{U}-\vec{V}| = \sqrt{3}$

ĐS: 90°, 60°, 120°.

11. $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ là ba véc tơ đơn vị. Tính góc tạo bởi hai trong ba véc tơ đó biết rằng:

$$|\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}| = |\vec{U}-\vec{V}-\vec{W}| = |\vec{U}-\vec{V}| = \sqrt{3}.$$

ĐS: 90°, 120°, 60°.

12. Hình thang ABCD (AB // CD) có AC = 5, BD = 3 và đoạn nối trung điểm hai đáy hình thang bằng 2. Tính góc tạo bởi hai đường chéo hình thang.

Hướng dẫn: Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Xuất phát từ:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow 4MN^2 = AC^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow 16 = 9 + 25 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -9$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -0{,}6.$$

Chứng minh các tính chất hình học

Một tính chất hình học luôn gắn với một yếu tố xác định như độ dài, góc, ...

Để giải loại toán đó ta thực hiện các bước sau:

- Mỗi yếu tố đang xét ta cho ứng với một véc tơ (hoặc một số véc tơ).
- Đưa bài toán về dạng tính độ dài hoặc góc hoặc diện tích ...

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu hai trung tuyến của một tam giác bằng nhau, thì tam giác đó cân.

Giải

Ta kí hiệu ABC là tam giác có các đường trung tuyến AM và BN bằng nhau. Ta chứng minh rằng AC = BC. Thật vậy từ công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác, ta có:

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\ ; \quad BN = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

và từ $AM = BN \Rightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \Rightarrow a = b$

trong đó $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác; a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác.

Giải

Kí hiệu O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và xuất phát từ hằng bất đẳng thức:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geq 0 \Rightarrow \quad 3R^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} \geq 0 \qquad (1)$$

Mặt khác:

$$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2, \qquad 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2, \qquad 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = 2R^2 - b^2 \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được đpcm. Dấu "=" trong (1) xảy ra khi O là trọng tâm tam giác hay ABC là tam giác đều.

Ví dụ 3. Kí hiệu G là trọng tâm tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của G tương ứng trên BC, CA, AB. Ta đặt a = BC, b = AC, c = AB.

Chứng minh rằng: $a^2\overrightarrow{GA_1} + b^2\overrightarrow{GB_1} + c^2\overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$.

Giải

Đặt $\vec{U} = a^2\overrightarrow{GA_1} + b^2\overrightarrow{GB_1} + c^2\overrightarrow{GC_1}$

Ta chứng minh rằng $\vec{U} = \vec{0}$.

$$\text{Xét } \vec{U}.\overrightarrow{GA_1} = a^2.\overrightarrow{GA_1}^2 + b^2.\overrightarrow{GB_1}.\overrightarrow{GA_1} + c^2.\overrightarrow{GC_1}.\overrightarrow{GA_1}$$

$$= \frac{1}{9}a^2h_a^2 + b^2GB_1.GA_1.\cos(180^\circ - C) + c^2.GC_1.GA_1.\cos(180^\circ - B)$$

$$= \frac{1}{9}a^2h_{a^2} - \frac{1}{9}b^2h_ah_b.\cos C + \frac{1}{9}c^2h_ah_c.\cos B$$

$$= \frac{4}{9}S\left(1 - \frac{b}{a}\cos C - \frac{c}{a}\cos B\right) = \frac{4}{9}aS(a - b\cos C - c.\cos B) \qquad (*)$$

Chú ý rằng: a = b.cosC + c.cosB.

Thật vậy, xuất phát từ: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \quad BC^2 = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = ab.\cos C + ac.\cos B$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = ab.\cos C + ac.\cos B \quad \Rightarrow \quad a = b.\cos C + c.\cos B \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $\vec{U}.\overrightarrow{GA_1} = 0$.

Tương tự ta có $\vec{U}.\overrightarrow{GB_1} = 0$, vì vậy $\vec{U} = \vec{0}$

(h_a, h_b, h_c là đường cao của tam giác, S là diện tích).

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. a, b là độ dài các cạnh liên tiếp của hình bình hành; m, n là độ dài các đường chéo của nó. Chứng minh rằng: $|a^2 - b^2| < m.n$

Hướng dẫn: Giả sử ABCD là hình bình hành.

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = AD^2 - AB^2 = b^2 - a^2.$

mà $|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}| \le AC.BD = m.n$

2. AA_1, BB_1, CC_1 là các trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$BB_1^2 + CC_1^2 = 5AA_1^2$ là điều kiện cần và đủ để tam giác đó vuông.

3. Chứng minh rằng nếu hai đường phân giác trong của một tam giác bằng nhau, thì tam giác đó cân.

Hướng dẫn: Hãy lập công thức tính độ dài phân giác theo ba cạnh.

4. Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Chứng minh rằng

$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \ge abc$, đúng với mọi vị trí của điểm M.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC})^2 \ge 0.$

5. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = 4R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

(a, b, c, R lần lượt là độ dài các cạnh và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác).

Hướng dẫn: Xuất phát từ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

6. AD, BE, CF là các trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

7. Chứng minh rằng để tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì điều kiện cần và đủ là hệ thức sau đây được nghiệm đúng với mọi vị trí của M:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} \qquad (*)$$

Hướng dẫn: Nếu ABCD là hình chữ nhật thì (*) đúng với mọi vị trí M. Đảo lại ta chọn M trùng với các đỉnh tứ giác.

8. Để tứ giác ABCD là hình bình hành, điều kiện cần và đủ là:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0.$$

Hướng dẫn: Xuất phát từ: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$ và $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD}$ (*)

Trong đó M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Nếu ABCD là hình bình hành thì M trùng với N và vế phải của (*) bằng 0. Ngược lại, nếu vế phải của (*) bằng 0 thì M trùng với N.

9. Để tứ giác ABCD là hình bình hành, điều kiện cần và đủ là:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

10. Cho ba véc tơ $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau đây không xảy ra đồng thời:

$$|\vec{U} - \vec{V}| > \sqrt{3}\,\vec{W}, \qquad |\vec{V} - \vec{W}| > \sqrt{3}\,\vec{U}, \qquad |\vec{W} - \vec{U}| > \sqrt{3}\,\vec{V}$$

Hướng dẫn: Giả sử ngược lại, bằng cách bình phương hai vế ở các bất đẳng thức và sau đó cộng các kết quả lại ta nhận được mâu thuẫn.

11. Cho năm véc tơ khác véc tơ không. Chứng minh rằng trong năm véc tơ đó luôn chọn ra được hai véc tơ sao cho độ dài tổng của chúng không vượt quá độ dài của tổng ba véc tơ còn lại.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 10.

12. Kí hiệu α, β, γ là góc tạo bởi từng cặp véc tơ trong ba véc tơ đơn vị.

Chứng minh rằng: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq -\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn: Kí hiệu $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ là các véc tơ đơn vị, thì ta có

$$2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = (\vec{U} + \vec{V} + \vec{W})^2 - 3.$$

13. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn: Kí hiệu A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. I là tâm của đường tròn đó. Xuất phát từ:

$$(\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'})^2 \geq 0 \qquad \text{và} \qquad \overrightarrow{IA'}.\overrightarrow{IB'} = r^2\cos(180^\circ - C) = -2r^2\cos C,$$

trong đó r = IA'.

14. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không có góc tù, thì:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn: Nếu tam giác không có góc tù, thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong hoặc trên cạnh tam giác và vì vậy góc tạo bởi các véc tơ:

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2C, \quad (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = 2A, \quad (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) = 2B.$$

Xuất phát từ $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 \geq 0$ và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = R^2\cos 2C$,

trong đó R = OA = OB.

15. Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng biểu thức

$MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2$ không phụ thuộc vị trí của điểm M.

Hướng dẫn: Gọi O là giao điểm các đường chéo hình bình hành:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow MA^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + OA^2,$$

$$MB^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + OB^2$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{BA}.$$

Tương tự: $MC^2 - MD^2 = 2.\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{DC}$.

16. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn O. H là trực tâm của tam giác, M là điểm bất kì. Chứng minh rằng biểu thức

$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MH^2 - 2MO^2$ không phụ thuộc vào điểm M.

Hướng dẫn: $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow MA^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + R^2$,

$$MB^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + R^2,$$

$$MC^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC} + R^2,$$

$$MH^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OH} + OH^2$$

nên $MA^2 + MB^2 + MC^2 - MH^2 - 2MO^2 = 3R^2 - OH^2$.

Chú ý rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

17. Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, M là điểm nằm trên đường tròn này. Chứng minh rằng biểu thức $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên đường tròn.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 5 (phần tính góc) và chú ý rằng

$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}.$$

18. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các điểm cho trước trên đường tròn (O; 1) sao cho

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}.$$

Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có: $MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n \geq n$.

Hướng dẫn: Từ $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}$

$$\Rightarrow \quad MA_1 = |\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{OA_1}| \geq$$

$$\geq (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OM}).\overrightarrow{OA_1} = 1 - \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OA_1}.$$

19. Tứ giác ABCD có đường chéo AC vuông góc với đường chéo BD tại trung điểm O của đoạn BD và có hai góc tại các đỉnh B và D vuông. Trên cạnh BC ta lấy điểm E và đặt $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BC}$. Trên cạnh CD ta lấy điểm F và đặt $\overrightarrow{DF} = y\overrightarrow{DC}$. Biết rằng AE ⊥ BF, chứng minh AF ⊥ DE.

Hướng dẫn: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} +$$

$$+ x\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + xy\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} +$$

$$+ x\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} + xy\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC} \qquad (**)$$

Rõ ràng từ (*) và (**) ta suy ra đpcm.

20. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$$12S^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC})^2$$

S là diện tích tam giác; a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác.

Hướng dẫn: Xuất phát từ công thức:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2} \quad \Rightarrow \quad 4S^2 = AB^2AC^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2$$

và bất đẳng thức:

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})^2 \leq 3\left\{\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)^2\right\}$$

Tính diện tích

> - Chọn cặp véc tơ cơ sở.
> - Dùng công thức tính diện tích tam giác.
>
> Diện tích S của tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$.

Ví dụ 1. Tam giác ABC có AB = c, AC = b và trung tuyến kẻ từ A bằng m. Tính diện tích tam giác đó.

Giải

Ta chọn cơ sở là các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, khi đó: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Bình phương hai vế của đẳng thức đó ta được:

$$4m^2 = b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{4m^2 - (b^2 + c^2)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 - \left(\frac{4m^2 - (b^2 + c^2)}{2}\right)^2}.$$

Ví dụ 2. Tính diện tích hình thang, biết độ dài hai đường chéo là 5 và 3, độ dài đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy hình thang bằng 2.

Giải

Kí hiệu ABCD là hình thang mà hai đáy AB và CD; M, N lần lượt là trung điểm AB và CD, ta chọn cơ sở của bài toán là các véc tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Xuất phát từ: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \quad \Rightarrow \quad 4MN^2 = AC^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -9 \quad \Rightarrow \quad S = 6.$$

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Tính diện tích tam giác biết ba trung tuyến.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó $S_{GAB} = \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Ta tính S_{GAB} theo GA, GB, GM xem cách giải trong ví dụ 1.

2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AC = p, BD = q và đoạn thẳng nối trung điểm hai đáy hình thang bằng m. Tính diện tích hình thang.

Hướng dẫn: Xem cách giải trong ví dụ 2.

3. Cho tam giác ABC có AB = c, AC = b, đường phân giác AD = 1. Tính diện tích tam giác.

Tìm tập hợp điểm

Các điều kiện của một bài toán tìm tập hợp điểm trong phần này chứa đựng tích vô hướng của hai véc tơ. Vì vậy để tìm tập hợp điểm thỏa mãn các điều kiện đó, ta cần thực hiện các bước sau:

- Rút gọn biểu thức tích vô hướng có trong giả thiết của bài toán về dạng đơn giản.
- Liên hệ giữa kết quả sau khi rút gọn với một số tập hợp điểm quen thuộc.

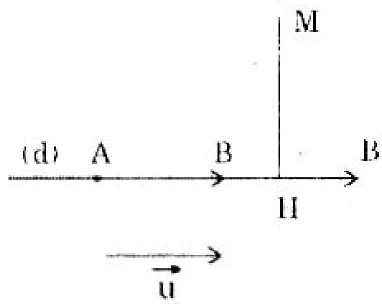
Ví dụ 1. Cho trước điểm A, véc tơ $\vec{U} \neq \vec{0}$ và số thực k. Tìm tập hợp M sao cho $\overrightarrow{MA}.\vec{U} = k$.

Giải

Dựng qua A đường thẳng (d) // $\vec{U}$ và dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$, khi đó (d) là một trục tọa độ. Gọi H là hình chiếu của M trên (d), ta có

$$\overrightarrow{MA}.\vec{U} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = \overline{HA}.\overline{AB} = k.$$

Vì $AB \neq 0$, nên $\overline{HA} = \dfrac{k}{\overline{AB}}$ không đổi và H cố định. Điều đó chứng tỏ tập M thuộc đường thẳng (d') ⊥ (d) tại H.



Đảo lại nếu M là điểm bất kì thuộc (d'), thì:

$$\overline{HA}.\overline{AB} = k \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{HA}.\vec{U} = k$$

$$\Rightarrow \quad (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}).\vec{U} = k \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MA}.\vec{U} = k$$

Tóm lại tập M là một đường thẳng.

Ví dụ 2. Cho đoạn AB = 2a (a là một độ dài cho trước) và số thực k. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$MA^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2$$

$$MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$$

Ta có: $AB^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - a^2$$

Theo giả thiết ta có: $MI^2 = k + a^2$

Nếu $k + a^2 > 0$ thì tập hợp M là đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{k + a^2}$.

Nếu $k + a^2 = 0$ thì tập hợp M là điểm I.

Nếu $k + a^2 < 0$ thì tập hợp M rỗng.

Ví dụ 3. Cho hai điểm A, B phân biệt và các số thực m, n, k trong đó $k > 0$, $m + n \neq 0$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $|m\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{BM}| = k$.

Giải

Gọi I là điểm sao cho $m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, khi đó I cố định và:

$$|m\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{BM}| = |(m + n)\overrightarrow{IM}| = k \quad \Rightarrow \quad IM = \frac{k}{|m + n|} \qquad (*)$$

Hệ thức (*) chứng tỏ tập M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $r = \frac{k}{|m + n|}$.

Đảo lại nếu M là điểm bất kì thuộc đường tròn đó, thì ta có:

$$|(m + n)\overrightarrow{IM}| = k \quad \Rightarrow \quad |m\overrightarrow{AM} + n\overrightarrow{BM}| = k.$$

Tóm lại tập hợp M là một đường tròn.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC, véc tơ $\vec{U} \neq \vec{0}$ và số thực k. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\vec{U} = k$.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác, khi đó:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

Bài toán quy về tìm tập M sao cho $\overrightarrow{MG}.\vec{U} = k'$ $(k' = \frac{k}{3})$.

2. Cho tam giác ABC và số thực k. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = k.$$

Hướng dẫn: Gọi I là trung điểm của AB. Bài toán quy về tìm tập M sao cho $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MC} = k'$ $(k' = \frac{k}{2})$.

3. Cho tam giác ABC và các số thực a, b, c $(a + b \neq 0)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = c$.

Hướng dẫn: Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện: $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MI}$

Bài toán quy về tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MC} = c'$, trong đó $c' = \dfrac{c}{a + b}$.

4. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) = 0.$$

Hướng dẫn: Gọi O là điểm có tính chất $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = \vec{0}$ và O' có tính chất $\overrightarrow{O'A} + 2\overrightarrow{O'B} = \vec{0}$.

Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{O'M} = 0$.

5. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $MB^2 + MC^2 = 3\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$.

Hướng dẫn: Hệ thức đã cho được viết lại dưới dạng:

$$(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = a^2$$

6. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $2MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

Hướng dẫn: Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

7. Cho tam giác ABC và các số thực m, n, r, k $(m + n + r \neq 0)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $mMA^2 + nMB^2 + rMC^2 = k$.

Hướng dẫn: Chọn điểm I sao cho $m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} + r\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

8. Cho đường tròn (O; R) và tam giác ABC nội tiếp trong đó sao cho

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \text{ không đổi.}$$

Tìm tập hợp trực tâm tam giác ABC, khi các đỉnh của tam giác đó thay đổi trên đường tròn.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, ta suy ra:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Nếu $9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) > 0$, thì tập hợp H là đường tròn.

Nếu $9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$, thì tập hợp H là một điểm.

9. Cho đoạn AB = a và số thực k. Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Hướng dẫn: Gọi I là trung điểm của AB, M' là hình chiếu của M trên đường thẳng AB. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \qquad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\,\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\,\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

$$= 2(\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'I}).\overrightarrow{BA} = 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM'} = k$$

và xem lại cách giải trong ví dụ 1.

Tìm hệ số véc tơ

Cho $\overrightarrow{U} = k.\overrightarrow{V}$ (*) hoặc $\overrightarrow{a} = x.\overrightarrow{b} + y.\overrightarrow{c}$ (**). Hãy tìm các hệ số k, x, y trong đẳng thức (*) hoặc (**).

Để giải dạng toán đó, ta có thể thực hiện các bước sau:

- Chọn một số véc tơ đã cho và lấy tích vô hướng cả hai vế của (*) hoặc (**) với véc tơ đó.
- Đưa các kết quả về phương trình hoặc hệ phương trình mà ẩn số là các hệ số cần tìm.

Ví dụ 1. Cho hai véc tơ đơn vị $\overrightarrow{U}$ và $\overrightarrow{V}$ hợp với nhau một góc 60°. Ta xét $\overrightarrow{W}$ có độ dài bằng $\sqrt{2}$ và vuông góc với $\overrightarrow{U}$, đặt $\overrightarrow{W} = x.\overrightarrow{U} + y.\overrightarrow{V}$

Tìm x và y.

Giải

Từ giả thiết ta suy ra: $2 = x^2 + y^2 + 2xy.\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = x^2 + y^2 + xy$

Mặt khác: $\overrightarrow{U}.\overrightarrow{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \dfrac{y}{2} = 0$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 2. \\ x + \dfrac{y}{2} = 0 \end{cases}$

Giải hệ trên ta được: $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{7}}, \quad y = \pm 2\sqrt{\dfrac{2}{7}}.$

Ví dụ 2. Tam giác ABC có AB = 1, AC = 2 và $\widehat{BAC} = 120°$. Gọi H là chân đường cao tam giác trên BC. Ta đặt BH = k.BC. Tìm k.

Giải

Vì AH ⊥ BC nên: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}).\overrightarrow{BC} = 0$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + k.BC^2 = 0$$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - AB^2 = -2$;

$$BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 7$$

Vậy ta suy ra $k = \frac{2}{7}$.

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ba véc tơ đơn vị $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ không đồng phương và ta đặt $x = \vec{U}.\vec{V}$, $y = \vec{V}.\vec{W}$, $z = \vec{W}.\vec{U}$.

Tính x, y, z biết rằng: $x\vec{W} + y\vec{U} + z\vec{V} = \vec{0}$ (*)

Từ các kết quả đó hãy tính góc tạo bởi hai trong ba véc tơ đã cho.

Hướng dẫn: Từ (*) ta suy ra x, y, z không đồng thời bằng 0. Lấy tích vô hướng cả hai vế của (*) lần lượt với $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ ta được:

$$2xz + 1 = 0, \quad 2yz + 1 = 0, \quad 2xy + 1 = 0.$$

2. Cho ba véc tơ đơn vị $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$. Ta đặt $\vec{W} = x\vec{U} + y\vec{V}$. Tìm x, y biết rằng $\vec{W}$ tạo với $\vec{U}$ và $\vec{V}$ các góc tương ứng bằng 30^0 và 45^0.

3. Cho hình vuông ABCD có cạnh AB = 1 và điểm M nằm trong hình vuông cách đỉnh A một khoảng $\frac{1}{2}$.

Ta đặt $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. Xác định x và y biết $\widehat{MAB} = 60^0$.

4. Cho tam giác đều ABC có cạnh AB = 1 và điểm O sao cho OA ⊥ OC. Ta đặt $\overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OC}$. Tìm x và y.

ĐS: $x = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{2}$.

25. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy cho hai véc tơ $\vec{U}(x_1; y_1)$, $\vec{V}(x_2; y_2)$. Khi đó $\vec{U}.\vec{V} = x_1.x_2 + y_1.y_2$.

Hệ quả

i) Độ dài véc tơ: $U = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

ii) Góc tạo bởi hai véc tơ:

Nếu ta đặt $\alpha = (U, V)$, thì: $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

Từ công thức tính góc ta suy ra: α nhọn $\Leftrightarrow$ $x.x_2 + y_1y_2 > 0$;

α vuông $\Leftrightarrow$ $x_1.x_2 + y_1y_2 = 0$;

và α tù $\Leftrightarrow$ $x_1.x_2 + y_1y_2 < 0$.

iii) Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(x_o; y_o)$ và vuông góc với $\vec{U}(p, q) \neq \vec{0}$.

Kí hiệu N(x; y) là điểm bất kì, rõ ràng N thuộc đường thẳng (d) khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{MN} \perp \vec{U} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{U} = 0 \Leftrightarrow p(x - x_o) + q(y - y_o) = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) được gọi là phương trình pháp dạng của đường thẳng, véc tơ $\vec{U}$ gọi là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng.

iv) Lập phương trình đường tròn đường kính AB, $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$. Đó là phương trình: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.

27. DÙNG BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Tìm các yếu tố hình học

Ví dụ 1. Cho các véc tơ $\vec{U}(1; -1)$, $\vec{V}(3; 4)$.

Đặt $\vec{a} = \vec{U} + \vec{V}$, $\vec{b} = 2\vec{U} - 3\vec{V}$. Tính độ dài các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và góc tạo bởi chúng.

Giải

Rõ ràng $\vec{a}(4; 3)$, $\vec{b}(-7; -14)$ $\Rightarrow$ $a = 5$, $b = 7\sqrt{5}$.

Kí hiệu α là góc phải tính thì $\cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 2. Cho ba véc tơ $\vec{U}(x_1; y_1)$, $\vec{V}(x_2; y_2)$, $\vec{W}(x_3; y_3)$.

Ta đặt $\vec{a} = (\vec{U}.\vec{V}).\vec{W}$ và $\vec{b} = \vec{U}.(\vec{V}.\vec{W})$, hãy tìm tọa độ của $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Hai véc tơ đó có bằng nhau không ?

Giải

Ta có: $\vec{a}((x_1x_2 + y_1y_2)x_3; (x_1x_2 + y_1y_2)y_3)$

$\vec{b}((x_2x_3 + y_2y_3)x_1; (x_2x_3 + y_2y_3)y_1)$

Ta xét hiệu của chúng $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, khi đó:

$$\vec{c}\,((y_1x_3 - y_3x_1)y_2;\ (x_1y_3 - x_3y_1)x_2).$$

Nói chung $\vec{c} \neq \vec{0}$, vì vậy $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Ví dụ 3. Cho hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Giải

Xuất phát từ công thức $2S = \sqrt{OA^2OB^2 - (\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB})^2}$,

ta suy ra $\quad 2S = |x_1y_2 - x_2y_1|$.

Ví dụ 4. Cho đường thẳng (d): $x = x_1 + at;\ y = y_1 + bt\ (t \in R)$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Tính khoảng cách từ M đến (d).

Giải

Gọi N là điểm bất kì thuộc (d), h là khoảng cách từ M đến (d), khi đó $h = \min MN$. Ta có: $\overrightarrow{MN}\,(x - x_0; y - y_0)$

$$MN^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (at + x_1 - x_0)^2 + (bt + y_1 - y_0)^2$$

$$= (a^2 + b^2)t^2 + 2t(a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)) + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

Đây là tam thức bậc hai đối với t có hệ số ở t^2 dương, nên ta có:

$$h^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - \frac{(a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0))^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{(b(x_1 - x_0) - a(y_1 - y_0))^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{|b(x_1 - x_0) - a(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (*)$$

Nếu phương trình của (d) có dạng $Ax + By + C = 0$, bằng cách chuyển nó sang dạng tham số và dùng kết quả trên, ta tính được:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (**)$$

Ví dụ 5. Trên đường thẳng $y = kx$ ta lấy hai điểm A và B có các hoành độ tương ứng là x_1 và x_2. Hãy tìm trên đường thẳng đó điểm C sao cho $\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OC}^2$ (O là gốc tọa độ).

Giải

Theo giả thiết ta có $\overline{OA} = (x_1; kx_1)$, $\quad OB = (x_2; kx_2)$, $\quad \overline{OC} = (x; kx)$

và $OA.OB = OC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + k^2x_1x_2 = x^2 + k^2x^2 \Leftrightarrow x_1x_2 = x^2.$$

Nếu $x_1x_2 \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{x_1x_2}, \quad y = k\sqrt{x_1x_2}$.

Lập phương trình đường thẳng và đường tròn

Ví dụ 4. Cho hai điểm A(2; 7) và B(−4; −9). Lập phương trình đường trung trực của đoạn AB.

Giải

Ta biết rằng đường trung trực của đoạn AB là đường thẳng đi qua trung điểm của AB và vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AB, khi đo I(1; −1) và $\overrightarrow{AB}(-6; -16)$ là véc tơ pháp tuyến của đường trung trực.

Phương trình đường trung trực có dạng:

$$-6(x - 1) - 16(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y - 5 = 0.$$

Ví dụ 5. Cho ba điểm A(a; 0), B(b; 0), C(0; c) (a và b khác 0, c > 0).

i) Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm đã cho.

ii) Giả sử AB là cạnh lớn nhất của tam giác ABC. Hãy lập phương trình đường tròn đường kính AB.

iii) Hãy so sánh bán kính các đường tròn đã lập.

Giải

i) Kí hiệu (d) và (d') là các đường trung trực của AB và BC. Phương trình của (d) và (d') có dạng:

$$2x - (a + b) = 0 \quad \text{và} \quad -2bx + 2cy + b^2 - c^2 = 0$$

Tâm đường tròn đi qua ba điểm có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - (a + b) = 0 \\ -2bx + 2cy + b^2 - c^2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình, ta được: $x = \dfrac{a + b}{2}$, $y = \dfrac{c^2 + ab}{2c}$.

Phương trình đường tròn đi qua ba điểm có dạng:

$$\left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c^2 + ab}{2c}\right)^2 = \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + ab}{2c}\right)^2$$

ii) Phương trình đường tròn đường kính AB có dạng:

$$(x - a)(x - b) + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - (a + b)x + ab = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a + b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

iii) Bán kính các đường tròn đã lập là:

$$R^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c^2+ab}{2c}\right)^2 \quad \text{và} \quad r^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Rõ ràng: $R \geq r$.

Ví dụ 6. Cho đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn. Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại M.

Giải

Kí hiệu w là tâm đường tròn, khi đó tiếp tuyến tại M của đường tròn vuông góc với $\overrightarrow{wM}$. Ta có:

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0-a)(x-a+a-x_0)+(y_0-b)(y-b+b-y_0)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-(x_0-a)^2-(y_0-b)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2.$$

Ví dụ 7. Cho đường thẳng $y = kx$ và điểm M thuộc đường thẳng có hoành độ $x = x_0$. Lập phương trình đường tròn bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng tại M.

Giải

Gọi w(a; b) là tâm đường tròn cần lập, khi đó $\overrightarrow{wM}$ vuông góc với đường thẳng, véc tơ pháp tuyến của đường thẳng (k; −1). Mặt khác $wM = R \Rightarrow$ tọa độ của w thỏa mãn hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-a}{k} = b-kx_0 \\ (x_0-a)^2+(kx_0-b)^2=R^2 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $\quad a = x_0 + \dfrac{kR}{\sqrt{1+k^2}}, \quad b = kx_0 - \dfrac{R}{\sqrt{1+k^2}}$

hoặc: $\quad a = x_0 - \dfrac{kR}{\sqrt{1+k^2}}, \quad b = kx_0 + \dfrac{R}{\sqrt{1+k^2}}.$

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = k \qquad (*)$$ (k là số thực cho trước).

Giải

Ta chọn hệ tọa độ sao cho A(a; 0), B(b; 0), C(0; c) (c > 0) và M(x; y).

khi đó: $(*) \Leftrightarrow \quad (x-a)(x-b) + y^2 + x(x-a) + y(y-c) + (x-b)x + y(y-c) = k$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 - 2(a+b)x - 2cy = k$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{a+b}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{3}\right)^2 = k + \frac{(a+b)^2 + c^2}{9}.$$

Nếu $(a+b)^2 + c^2 > -9k$, thì tập hợp M là đường tròn.

Ví dụ 9. Cho hai điểm phân biệt A, B và số thực k. Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = k$.

Giải

Ta chọn hệ tọa độ sao cho $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$ $(a > 0,\ 2a = AB)$. Kí hiệu $(x; y)$ là tọa độ của M ta có:

$$MA^2 - MB^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad -4ax = k \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{k}{4a}$$

và phương trình này chứng tỏ tập M là một đường thẳng.

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC trong đó $A(-1; 0)$, $C(1; 0)$, $B(0; b)$ $(b > 0)$. Gọi H là hình chiếu của O trên BC (O là gốc tọa độ), M là trung điểm của OH. Chứng minh rằng $MB \perp AH$.

Giải

Trước hết ta tìm tọa độ của H. Vì $OH \perp BC$, nên phương trình của OH có dạng $x - by = 0$. Phương trình đường thẳng BC có dạng $y = -bx + b$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $x - by = 0$ và $y = -bx + b$

$$\Rightarrow \quad H\left(\frac{b^2}{b^2+1}, \frac{b}{b^2+1}\right) \quad \text{và tọa độ} \quad M\left(\frac{b^2}{2(b^2+1)}, \frac{b}{2(b^2+1)}\right).$$

Ta lập các véc tơ BM và AH:

$$\overrightarrow{BM}\left(\frac{b^2}{2(b^2+1)}, \frac{b}{2(b^2+1)} - b\right); \quad \overrightarrow{AH}\left(\frac{b^2}{b^2+1} + 1, \frac{b}{b^2+1}\right).$$

Rõ ràng $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AH} = 0$.

Ví dụ 11. Trên giấy kẻ ô ta gọi các đường kẻ là đường lưới, giao điểm của hai đường lưới là nút lưới, mỗi ô vuông nhỏ nhất có đỉnh là các nút lưới và các cạnh nằm trên đường lưới là một đơn vị diện tích.

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có 3 đỉnh là các nút lưới và diện tích bằng $\frac{1}{2}$, thì bên trong và trên các cạnh tam giác không chứa nút lưới nào.

Giải

Ta chọn hệ tọa độ sao cho $A(0; 0)$, $B(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$ (x_1, y_1, x_2, y_2 là các số nguyên), khi đó diện tích $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ (*) (xem ví dụ 3).

Giả sử tồn tại điểm $M(x; y)$ nằm trong hoặc trên biên tam giác, ta kí hiệu S_1, S_2, S_3 là diện tích tam giác MAB, MBC, MCA. Ta có:

$$S_1 = \frac{1}{2}|x_1y - xy_1|; \qquad S_2 = \frac{1}{2}|x_2y - xy_2|;$$

$$S_3 = \frac{1}{2}|(x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y)|$$

Vì $|x_1y - xy_1|$, $|x_2y - xy_2|$, $|(x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y)|$ là các số nguyên dương nên $S = S_1 + S_2 + S_3 \geq 1$ trái với giả thiết.

28. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Trên giấy kẻ ô cho tam giác ABC có ba đỉnh là các nút lưới và bên trong tam giác có một nút lưới. Chứng minh rằng nút lưới đó là trọng tâm tam giác.

Hướng dẫn: Dùng công thức $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

2. Trên giấy kẻ ô cho tam giác ABC có 3 đỉnh là các nút lưới, bên trong và trên các cạnh tam giác không có một nút lưới nào. Chứng minh rằng tam giác đó có một góc không nhọn.

3. $A(0; a)$, $B(1; 0)$, $C(0; c)$, $D(-1; 0)$ là bốn đỉnh của một tứ giác có hai góc tại các đỉnh B và D vuông. Trên cạnh CD ta lấy điểm M, trên cạnh CB lấy điểm N sao cho $AM \perp DN$. Chứng minh rằng: $AN \perp BM$.

Hướng dẫn: Xác định tọa độ của các véc tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{BM}$ và chứng tỏ

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{BM} = 0.$$

4. Cho đường thẳng $y = kx$ và hai điểm A, B có các hoành độ tương ứng là x_1 và x_2. Hãy tìm trên đường thẳng đó điểm C sao cho O và C chia điều hòa đoạn AB (O là gốc tọa độ).

5. Cho đường thẳng $y = 2x$ và hai điểm A, B có các hoành độ tương ứng là $x_1 = -2$ và $x_2 = 3$. Hãy tìm trên đường thẳng đó điểm C sao cho

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{2}{OC} \text{ (O là gốc tọa độ).}$$

Hướng dẫn:

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{2}{OC} \Leftrightarrow (CA + CB).OC = 2CA.CB$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}.$$

6. A(a; 0), B(b; 0), C(0; c) (a, b khác 0, c > 0) là ba đỉnh tam giác ABC.

i) Tìm sự phụ thuộc của a, b, c để tam giác ABC có ba góc nhọn.

ii) Giả sử ABC là tam giác có 3 góc nhọn và c bằng đường cao lớn nhất của tam giác. Chứng minh rằng: $R + r \le c$, trong đó R, r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

7. Trên giấy kẻ ô có thể vẽ được một tam giác đều mà các đỉnh là nút lưới không ?

ĐS: Không thể. Hãy chọn hệ tọa độ sao cho các đỉnh tam giác là (x; 0), (–x; 0), (0; y); trong đó x là số nguyên dương, khi đó y không nguyên.

8. Trên giấy kẻ ô có thể vẽ được một hình ngũ giác đều mà các đỉnh là nút lưới không ?

ĐS: Không.

9. Trên giấy kẻ ô tồn tại hay không một hình tứ giác ABCD mà các đỉnh là nút lưới và thỏa mãn đồng thời các điều kiện: AC = 2BD và $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$?

ĐS: Không.

10. Trên giấy kẻ ô cho hai điểm A và B trùng với hai nút lưới. Hãy tính khoảng cách từ nút gần đường thẳng AB nhất đến đường thẳng đo. (nút không nằm trên AB).

11. Trên giấy kẻ ô có hay không một đường gấp khúc kín với số lẻ cạnh, các cạnh có độ dài bằng nhau và các đỉnh của đường gấp khúc trùng với nút lưới ?

ĐS: Không.

29. ĐỊNH LÍ HÀM SIN VÀ HÀM COS

Trong phần này ta kí hiệu các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC là a, b, c. Các đường cao, trung tuyến, phân giác kẻ từ các đỉnh đó là h_a, h_b, h_c; m_a, m_b, m_c; l_a, l_b, l_c. Bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, bàng tiếp trong các góc tương ứng là R, r, R_a, R_b, R_c; chu vi 2p, diện tích S.

- **Phát biểu các định lí:**

– ***Định lí hàm sin:*** Trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

– ***Định lí hàm cos:*** Trong tam giác ABC, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

30. DÙNG CÁC ĐỊNH LÍ HÀM SIN VÀ HÀM COS VÀO VIỆC GIẢI TOÁN

Tính các yếu tố hình học

Ví dụ 1. Cho hình bình hành ABCD có $A = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$, các đường chéo $AC = m$, $BD = n$. Tính bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD và ABC.

Giải

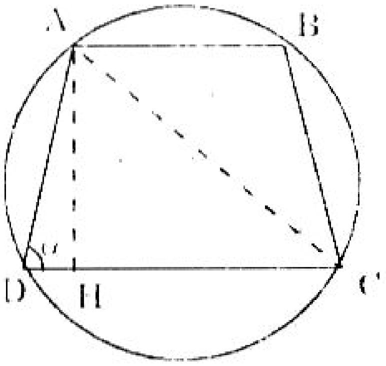
Áp dụng định lí hàm sin cho hai tam giác ABD và ABC, ta được:

$$R_1 = \frac{m}{2\sin\alpha}, \quad R_2 = \frac{n}{2\sin\alpha}.$$

Ví dụ 2. Cho hình thang cân ABCD có hai đáy $AB = a$, $CD = b$ $(b > a)$, góc nhọn ở đáy bằng α. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang.

Giải

Rõ ràng bán kính đường tròn ngoại tiếp ABCD là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. Theo định lí hàm sin cho tam giác ACD, ta có $R = \dfrac{AC}{2\sin\alpha}$. Ta kẻ $AH \perp CD$



$$\Rightarrow HD = \frac{b-a}{2}, \quad AH = HD.\text{tg}\alpha, \quad HC = \frac{b+a}{2}$$

$$\Rightarrow AC^2 = HC^2 + HA^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\text{tg}\alpha\right)^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\text{tg}\alpha\right)^2}.$$

Ví dụ 3. Tính cạnh c của tam giác ABC, biết $b = 13$, $a = 12$,
$13\cos A = 20\cos B$.

Giải

Theo định lí hàm cos, ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Rightarrow \quad 2(b^2 - a^2) = 2c(b\cos A - a\cos B)$$

$$\Rightarrow \quad 25 = c(13\cos A - 12\cos B) = 8c.\cos B$$

$$\Rightarrow \quad 169 - 144 = c^2 - 75 \quad \Rightarrow \quad c = 10.$$

Ví dụ 4. Tính sinB, biết $a - b = 1$, $h_c = 2$, $A = 30^\circ$.

Giải

Từ giả thiết, ta suy ra: $\quad b = \dfrac{h_c}{\sin A} = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

Theo định lí hàm sin. $\quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \dfrac{2}{5}.$

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\sin B = 2\sin C.\cos A, \text{ thì ABC là tam giác cân.}$$

Giải

Từ $\sin B = 2\sin C.\cos A \Rightarrow b = 2c.\cos A \Rightarrow b = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{b}$

$$\Rightarrow b^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow c = a.$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2, \quad \text{thì} \quad a \geq \frac{b + c}{2} \quad \text{và} \quad \hat{A} = 60^\circ.$$

Giải

Từ $\dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \Rightarrow b^3 + c^3 - a^3 = a^2(b + c) - a^3$

$$\Rightarrow (b + c)(b^2 + c^2 - bc) = a^2(b + c)$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - bc = a^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{b + c}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b - c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a \geq \frac{b + c}{2}.$$

Từ $b^2 + c^2 - bc = a^2 \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{2}$ và $A = 60^\circ$.

Các bài toán cực trị

Ví dụ 7. Cho góc $xOy = \alpha$ $(0 < \alpha < 180^\circ)$ và hai điểm A, B nằm trên hai cạnh của góc sao cho $OA + OB = k$ (k là số dương cho trước).

i) Tìm vị trí của các điểm A, B trên hai cạnh góc sao cho độ dài AB ngắn nhất.

ii) Tìm vị trí của các điểm A, B trên hai cạnh góc sao cho bán kính đường tròn đi qua 3 điểm O, A, B nhỏ nhất.

Giải

i) Theo định lí hàm cos cho tam giác OAB, ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos\alpha$$
$$= (OA + OB)^2 - 2(1 + \cos\alpha).OA.OB$$
$$= k^2 - 2(1 + \cos\alpha).OA.OB.$$

Vì $1 + \cos\alpha > 0$, nên AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OA.OB lớn nhất.

Từ $OA + OB \geq 2\sqrt{OA.OB} \Rightarrow OA.OB \leq \dfrac{k^2}{4}$

và $\min(OA.OB) = \dfrac{k^2}{4}$ khi $OA = OB = \dfrac{k}{2}$.

ii) Kí hiệu R là bán kính đường tròn đi qua ba điểm O, A, B. Theo định lí hàm sin, ta có $AB = 2R.\sin\alpha \Rightarrow R$ min khi AB min (xem lại kết quả trên).

Ví dụ 8. Trong số các tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn cho trước, hãy tìm một tam giác có tổng: $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C$ lớn nhất.

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn đã cho, theo định lí hàm sin, ta có:

$$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2}.$$

Bài toán quy về tìm tam giác ABC sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ lớn nhất. Ta xuất phát từ $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geq 0$ (O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác)

$$\Rightarrow \quad 3R^2 + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \qquad (\text{vì } 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2R^2 - AB^2 = 2R^2 - c^2\ldots)$$

$\text{Max}(a^2 + b^2 + c^2) = 9R^2$, khi O là trọng tâm tam giác ABC và do đó ABC đều.

Dựng hình

Ví dụ 9. Dựng tam giác ABC, biết cạnh AB = c, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và $\sin A + \sin B = m$ $(0 < m < 2)$.

Giải

Phân tích: Giả sử tam giác ABC đã dựng được, khi đó đỉnh C thuộc cung chứa góc 2α xác định $\sin 2\alpha = \dfrac{c}{2R}$.

Theo định lí hàm sin ta có: $CA + CB = 2R.m$. Gọi C' là điểm trên tia đối của tia CB sao cho CC' = CA, thì góc $AC'B = \alpha$. Từ đó ta suy ra cách dựng:

- Dựng AB = c
- Dựng đường tròn (O; R) đi qua A, B.
- Dựng cung chứa góc α ứng với dây AB.
- Dựng cung tròn tâm B, bán kính $r = 2Rm$ và gọi C' là điểm chung của nó và cung chứa góc α.

– Dựng tia BC' và tia đó cắt đường tròn (O; R) tại C.

Theo cách dựng đã trình bày trên, tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Bài toán có thể có 4 hoặc 2 nghiệm hoặc vô nghiệm.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 10. Cho góc xOy = α ($0 < \alpha < 180^\circ$) và số a > 0. Với mỗi điểm M nằm trong góc xOy ta hạ các đường vuông góc MH và MK xuống các cạnh góc sao cho KH = a. Tìm tập hợp điểm M.

Giải

Rõ ràng M nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm O, K, H đường kính là OM. Theo định lí hàm sin cho tam giác OKH, ta có a = OM.sinα. Điều đó chứng tỏ M thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Vì M là điểm trong của góc $\widehat{xOy}$, nên tập M là một cung của đường tròn nằm trong góc đó.

Đảo lại nếu M là một điểm bất kì thuộc cung đã nêu, thì ta vẽ đường tròn đường kính OM cắt hai cạnh góc tại K và H; rõ ràng KH = a và K và H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống các cạnh góc.

31. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Tính các yếu tố hình học

1. Tính độ dài các cạnh tam giác ABC, biết: $\sin A = \dfrac{3}{5}$, $b^2 + c^2 = 15$, $h_a = \dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $2S = bc.\sin A = a.h_a \Rightarrow bc = \dfrac{5}{4}a$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = 15 - \frac{5}{2}a.\cos A.$$

Từ $\sin A = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \cos A = \dfrac{4}{5}$ hoặc $\cos A = -\dfrac{4}{5}$.

Nếu $\cos A = \dfrac{4}{5}$ thì $a^2 = 15 - 2a \Rightarrow a = 3$. b và c là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 15 \\ bc = \dfrac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 3\sqrt{\dfrac{5}{2}} \\ bc = \dfrac{15}{4} \end{cases}$$

Nếu $\cos A = -\frac{4}{5}$, thì $a^2 = 15 + 2a \Rightarrow a = 5$. b và c là nghiệm của hệ.

$$\begin{cases} b + c = 3\sqrt{\frac{5}{2}} \\ bc = \frac{25}{4} \end{cases}$$

Sau khi tìm được b và c, hãy thử lại điều kiện tồn tại của tam giác.

2. Tính các cạnh a và c của tam giác ABC, biết $\hat{A} = 30^\circ$, $b = 3\sqrt{3}$, $a + c = 3h_b$.

Hướng dẫn: Ta có: $c = 2h_b$ và $2a = c$

Từ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

3. Tính các cạnh b và c, biết $a = \sqrt{5}$, $b = 2c$, $h_a = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $ah_a = bc\sin A \Rightarrow 1 = c^2.\sin A$.

Mặt khác: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \Rightarrow 5 = 5c^2 - 4c^2.\cos A$

Ta có: $\cos A = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{c^2}\right)$ và $\sin A = \frac{1}{c^2}$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{25}{16}(1 - x)^2 = 1, \quad \text{trong đó } x = \frac{1}{c^2}.$$

4. Tính sinA và sinB, biết $a - b = 1$, $h_c = \frac{3}{2}$, $R = 4$.

Hướng dẫn: Từ $h_c = b\sin A = 2R\sin A.\sin B$

và $a - b = 2R(\sin A - \sin B)$

ta suy ra hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sin A - \sin B = \frac{1}{8} \\ \sin A.\sin B = \frac{3}{16} \end{cases} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}, \ \sin B = \frac{3}{8}$$

5. Tính sinC, biết $a = 6$, $r = 1$, $\cos B = \frac{4}{5}$.

Hướng dẫn: Ta tính được $\sin B = \frac{3}{5}$.

Từ công thức: $2S = (a + b + c)r = a.c.\sin B$

$$\Rightarrow 13c - 5b = 30 \quad \text{và} \quad b^2 = c^2 - \frac{36}{5}c + 36.$$

6. Tính các cạnh b và c, biết rằng $\hat{A} = 60^\circ$, $r = \sqrt{3}$, $a = 5$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ: $2S = bc.\sin A = (a + b + c).r$

$$\Rightarrow \quad b.c = 2(b + c + 5) \qquad (*)$$

Mặt khác theo định lí hàm cos, ta có: $25 = b^2 + c^2 - bc \qquad (**)$

Từ (*) và (**) ta tìm được b và c. Hãy kiểm tra các bộ 3 số a, b, c đã tìm lập thành ba cạnh tam giác.

7. Tính cạnh a của tam giác ABC, biết $\sin A = \frac{3}{5}$, $r_b = 6$, $b - c = 1$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $S = \frac{bc.\sin A}{2} = \frac{a + c - b}{2}.r_b$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{5}bc = 6(a + c - b) \qquad (*).$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$, trong đó: $\cos A = \frac{4}{5}$ hoặc $\cos A = -\frac{4}{5}$.

Chứng minh các tính chất hình học

1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC:

$$bc(b^2 - c^2)\cos A + ca(c^2 - a^2)\cos B + ab(a^2 - b^2)\cos C = 0.$$

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm cos.

2. Chứng minh rằng trong tam giác ABC:

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm sin.

3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC:

$$\frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} + \frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} = 0.$$

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm sin ta có:

$$b^2 - c^2 = 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C) = 4R^2(\cos^2 C - \cos^2 B).$$

4. Chứng minh rằng trong tam giác ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}A.$$

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm cos và chú ý: $2S = bc.\sin A$.

5. Chứng minh rằng trong tam giác ABC:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C).$$

Hướng dẫn: Dùng kết quả bài 4.

6. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$2\cos B.\sin C = \sin A,$$ thì tam giác đó cân.

Hướng dẫn: Phối hợp định lí hàm sin và hàm cos.

7. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$1 + \cos A = \frac{c^2 + b^2}{2bc} \quad \text{thì} \quad a^2 = 2bc.$$

8. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\sin A + \sin B = 2\sin C$ và $\cos A + \cos B = 2\cos C$ thì tam giác đó là đều.

Hướng dẫn: Bình phương hai đẳng thức đã cho và cộng lại.

Chú ý: $\sin^2 A + \sin^2 B \geq 2\sin A.\sin B$; $\cos^2 A + \cos^2 B \geq 2\cos A.\cos B$.

9. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

i) $\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

ii) $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

iii) $a^n = b^n + c^n \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ$, n là số nguyên và n > 2.

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm cos, ta có: $\cos A = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$

và chú ý rằng $\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \cos A > 0$; $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \cos A < 0$.

iii) $a^n = b^n + c^n \Rightarrow x^n + y^n = 1$, $x = \dfrac{b}{a}$, $y = \dfrac{c}{a}$, $x^2 + y^2 > 1$

$$\Rightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

10. Tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$. Chứng minh rằng: $2a \geq b + c$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ: $a^2 = b^2 + c^2 - bc = \left(\dfrac{c+b}{2}\right)^2 + 3.\left(\dfrac{c-b}{2}\right)^2$.

11. Tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$. Chứng minh rằng $a^2 \leq \dfrac{3}{2}(b^2 + c^2)$.

12. Tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ$. Chứng minh rằng:

$$a^2 \geq \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)(b^2 + c^2) \quad \text{và} \quad a \geq \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}\,(b + c).$$

Hướng dẫn: Từ $a^2 = b^2 + c^2 - bc\sqrt{2}$ và $-2bc \geq -(b^2 + c^2)$.

Bất đẳng thức thứ hai được suy từ: $2(b^2 + c^2) \geq (b + c)^2$.

13. Chứng minh rằng nếu các cạnh tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$a^4 = b^4 + c^4$, thì ba góc tam giác cùng nhọn và $2\sin^2 A = \text{tg}B.\text{tg}C$.

Hướng dẫn: Rõ ràng a > b và a > c, vì vậy ta cần chứng minh $\hat{A} < 90^\circ$. Điều đó được suy từ bất đẳng thức $a^2 < b^2 + c^2$.

Từ $a^4 = b^4 + c^4 \Rightarrow a^4 = (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) = 2b^2c^2$

$\Rightarrow 2a^2\cos B.\cos C = bc$

$\Rightarrow 2\sin^2 A\cos B.\cos C = \sin B\sin C$.

14. Chứng minh rằng trong tam giác ABC: nếu $b^2 + c^2 > 5a^2$, thì $\hat{A} < 45^\circ$.

Hướng dẫn: Theo định lí hàm cos, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > \frac{2(b^2 + c^2)}{5bc} = \frac{2}{5}\left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq \frac{4}{5} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

15. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng bán kính các đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác ABC, AHB, BHC, CHA bằng nhau.

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm sin cho từng tam giác.

16. Cho tam giác ABC và điểm H không trùng với bất kì đỉnh nào của tam giác có tính chất là bán kính của 4 đường tròn ngoại tiếp 4 tam giác ABC, AHB, BHC, CHA. H có phải là trực tâm tam giác không?

17. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, các hệ thức sau đây là đúng:

i) $S = \dfrac{a.b.c}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

ii) $r = (p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\dfrac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\dfrac{C}{2}$

iii) $r_a = p\text{tg}\dfrac{A}{2}$, $\quad r_b = p\text{tg}\dfrac{B}{2}$, $\quad r_c = p\text{tg}\dfrac{C}{2}$

iv) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

Dùng các kết quả của bài 17 để giải các bài toán sau

18. Chứng minh rằng trong tam giác ABC: $\text{tg}\dfrac{A}{2}\text{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a + b = 2c$.

Hướng dẫn: Phối hợp các công thức: $r = (p-a)\text{tg}\dfrac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\dfrac{B}{2}$,

$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

19. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có: $(r_a^2 + p^2)(r_a - r) = 4Rr_a^2$.

Hướng dẫn: Dùng các công thức: $S = (p-a)r_a = pr$.

20. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có: $r.r_a = r_b.r_c.\text{tg}^2\frac{A}{2}$

21. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a} = \left(\text{tg}\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\text{tg}\frac{B}{2}\right)^2 + \left(\text{tg}\frac{C}{2}\right)^2.$$

22. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có: $S \geq 3\sqrt{3}\,r^2$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{27}$ và $S = pr$.

23. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có: $16S^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ: $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{27}$.

$$\text{và} \quad 4p^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

24. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có: $4S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{27}$.

25. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $36S = \sqrt{3}(a + b + c)$, thì tam giác đó là đều.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 24.

26. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$S = 0,25(a + b + c)(a + c - b)$, thì tam giác đó vuông.

27. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2}}{2a - c}$$, thì tam giác đó cân.

Hướng dẫn: Bình phương hai vế và đổi mẫu số vế trái:

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B.$$

28. Cho tam giác ABC có các góc tại B và C nhọn. Trên cạnh BC ta lấy điểm D và kí hiệu R_1, R_2 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ACD.

i) Chứng minh rằng tỉ số $\frac{R_1}{R_2}$ không phụ thuộc vị trí của D trên BC.

ii) Xác định vị trí của D để R_1 và R_2 nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Dùng định lí hàm sin cho hai tam giác ABD và ACD, ta có $AD = 2R_1\sin B = 2R_2\sin C$, trong đó sinB và sinC không đổi.

29. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Ta đặt $\alpha = \widehat{GAB}$, $\beta = \widehat{GBC}$, $\gamma = \widehat{GCA}$. Chứng minh rằng:

$$\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\,\beta + \text{cotg}\,\gamma = 3(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C).$$

Hướng dẫn: Kí hiệu $x = GA$, $y = GB$, $z = GC$ và dùng kết quả bài 4 ta có:

$$y^2 = x^2 + c^2 - 4S_{AGB}.\text{cotg}\alpha,$$

$$z^2 = y^2 + a^2 - 4S_{BGC}.\text{cotg}\beta,$$

$$x^2 = y^2 + b^2 - 4S_{CGA}.\text{cotg}\gamma.$$

Chú ý rằng: $S_{AGB} = S_{BGC} = S_{CGA} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

30. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác sao cho

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \varphi.$$

Chứng minh rằng: $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \text{cotg}\varphi$.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 29.

31. Cho hai nửa đường tròn O và O' đường kính tương ứng AB và AC (B nằm trên đoạn AC) nằm cùng phía đối với AC. Trên AB ta lấy điểm M. Đường thẳng (d) vuông góc với AB tại M cắt các nửa đường tròn O và O' tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ không phụ thuộc vị trí của M trên AB.

Hướng dẫn: Ta đặt $\alpha = AQM$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Theo định lí hàm sin ta có:

$$AP = 2R.\sin\alpha \qquad \text{trong đó } \sin\alpha = \frac{AM}{AQ} \quad \Rightarrow \quad 2R = \frac{AP.AQ}{AM}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $AP^2AQ^2 = AM^2.AB.AC$.

32. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn O. Các điểm A', B', C' lần lượt nằm trên các cung $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$. Chứng minh rằng để các dây AA', BB', CC' đồng quy điều kiện cần và đủ là: $\dfrac{BA'}{A'C}.\dfrac{CB'}{B'A}.\dfrac{AC'}{C'B} = 1$.

Hướng dẫn: Ta kí hiệu M, N, E lần lượt là giao điểm các dây cung AA' và BC, BB' và AC, CC' và AB. Theo định lí Xêva, điều kiện cần và đủ để AA', BB', CC' đồng quy là: $\dfrac{BM}{MC}.\dfrac{CN}{NA}.\dfrac{AE}{EB} = 1$ (*)

Mặt khác theo định lí hàm sin, ta có:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\sin C}{\sin B}.\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{MAC}} = \frac{BA'}{A'C}.\frac{\sin C}{\sin B}... \qquad (**)$$

Thay các kết quả trong (**) vào (*), ta suy ra điều phải chứng minh.

33. Cho đường tròn O và điểm M nằm ngoài O. Từ M ta kẻ tới O hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là các tiếp điểm). Đường thẳng (d) đi qua M cắt O tại các điểm C, D. Đường thẳng (d') khác (d) đi qua M cắt O tại các điểm E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF (H nằm trong O). Chứng minh rằng: A, B, H thẳng hàng.

Hướng dẫn: Sử dụng kết quả bài 32, hãy chứng minh rằng:

$$\frac{AC}{CE}\cdot\frac{EB}{BF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$$

34. Chứng minh rằng nếu các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$2\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\text{cotg}^2A+\text{cotg}^2B,$$ thì tam giác đó cân.

Hướng dẫn: Cộng hai vế với 2 và rút gọn ta được:

$$\frac{4}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}\quad\Rightarrow\quad a^2+b^2=2ab.$$

35. Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu các trung tuyến AA' và BB' vuông góc với nhau thì $2.\cos^2C+\sin A.\sin B.\cos C=2$.

Hướng dẫn: Từ $AA'\perp BB' \Rightarrow 5c^2=b^2+a^2$

$$\Rightarrow\quad 2c^2=ab\cos C\quad\Rightarrow\quad 2\sin^2C=\sin A.\sin B.\cos C$$

$$\Rightarrow\quad 2(1-\cos^2C)=\sin A\sin B.\cos C.$$

36. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$, thì tam giác đó vuông.

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta suy ra: $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$

$$\Rightarrow\quad a^2+b^2+c^2=8R^2.$$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

37. Tam giác ABC có hai góc kề với cạnh BC nhọn. Gọi H là chân đường cao tam giác kẻ từ A; P và Q là giao điểm tương ứng của AH với các đường phân giác của các góc B và C.

Chứng minh rằng nếu BP = CQ thì AB = AC.

Hướng dẫn: Ta có: $BP=\dfrac{c.\cos B}{\cos\frac{B}{2}}$, $CQ=\dfrac{b.\cos C}{\cos\frac{C}{2}}$ (c = AB, b = AC)

$$BP=CQ\quad\Leftrightarrow\quad\frac{c.\cos B}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{b.\cos C}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\sin C\cos B\cos\frac{C}{2}=\sin B\cos C\cos\frac{B}{2}\quad\Leftrightarrow\quad \text{tg}C\cos\frac{C}{2}=\text{tg}B\cos\frac{B}{2}$$

Ta xét hàm số $y = tg2x\cos x$ với $x \in (0; 45°)$. Vậy y đồng biến trên đoạn $(0; 45°)$ và nếu $y(x_1) = y(x_2)$ thì $x_1 = x_2$. Ta coi $x_1 = \frac{B}{2}$, $x_2 = \frac{C}{2}$.

Từ $tgC\cos\frac{C}{2} = tgB\cos\frac{B}{2}$, ta suy ra $B = C$.

38. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC; R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng trong số các độ dài R_1, R_2, R_3 có ít nhất một độ dài không lớn hơn R.

Hướng dẫn: Ta xét tam giác IBC, theo định lí hàm sin áp dụng cho tam giác đó, ta có:

$$R_1 = \frac{BC}{2\sin\left(90° + \frac{A}{2}\right)} = 2R\sin\frac{A}{2}$$

Tương tự ta có: $R_2 = 2R\sin\frac{B}{2}$, $\quad R_3 = 2R\sin\frac{C}{2}$

Do đó: $R_1R_2R_3 = 8R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

và chú ý rằng $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq 1$.

39. Cho tam giác ABC. Ta chia cạnh BC thành n đoạn nhỏ bằng nhau bởi các điểm chia (n lẻ). Kí hiệu α là góc nhìn từ A xuống một đoạn chia chứa trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

$$\cot g\alpha = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1}{n}\right)(\cot gB + \cot gC) + n\cot gA.$$

Hướng dẫn: Vì n lẻ nên số điểm chia là chẵn. Gọi M là trung điểm của BC, khi đó các điểm chia gần B và C nhất đối xứng với nhau qua M và các điểm gần M nhất về cả hai phía cũng đối xứng với nhau qua M. Ta kí hiệu D, E là các điểm gần M nhất về cả hai phía. Ta đặt BC = a, đường cao hạ từ A bằng h, S_1, S lần lượt là diện tích các tam giác ADE và ABC.

Ta có:

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 4S_1\cot g\alpha;\ AD^2 + AE^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}DE^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}DE^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}a^2 - 4S_1\cot g\alpha$$

Mặt khác ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 4S\text{cotg}A$, $S' = \frac{1}{n}S$

Vì vậy ta suy ra $\frac{4S}{n}\text{cotg}\alpha = 4S\text{cotg}A + \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

$$\Rightarrow \quad \text{cotg}\alpha = n\text{cotg}A + \frac{a^2}{8S}\left(n - \frac{1}{n}\right)$$

Chú ý rằng: $2S = a.h \Rightarrow \frac{a^2}{8S} = \frac{a}{4h}$, $a = h(\text{cotg}A + \text{cotg}B)$.

40. Cho tam giác ABC. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, d là đường thẳng đi qua C và song song với AB. D và E lần lượt là các giao điểm của AI với BC và d. F và G lần lượt là các giao điểm của BI với AC và d.

Chứng minh rằng nếu DE = GF thì AC = BC.

Hướng dẫn: Từ hai tam giác đồng dạng ABD và ECD ta suy ra:

$$DE = \frac{AC}{AB}.AD$$

Tương tự ta có: $GF = \frac{BC}{AB}.BF$

Từ giả thiết ta cần nghiệm lại $BC.BF = AC.AD$ (*)

Ta có: $BF = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a + c}$, $AD = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c}$

Vì vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{a^2.\cos\frac{B}{2}}{a + c} = \frac{b^2.\cos\frac{A}{2}}{b + c}$ $(a = BC,\ b = AC,\ c = AB)$

Giả sử $a > b$, khi đó: $a^2(b + c) > b^2(a + c)$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2b - b^2a) + c(a^2 - b^2) > 0$$

$$\Rightarrow \quad ab(a - b) + c(a^2 - b^2) > 0 \quad (**)$$

Bất đẳng thức (**) đúng, do đó $\frac{a^2}{a + c} > \frac{b^2}{b + c}$ (***)

Mặt khác $A > B$, nên: $\cos\frac{B}{2} > \cos\frac{A}{2}$ (****)

Từ các kết quả (***) và (****) ta nhận được mâu thuẫn. Tương tự a < b ta cũng nhận được mâu thuẫn.

Điều đó chứng tỏ a = b.

Dựng hình

1. Dựng tam giác ABC, biết hai cạnh a, b và $\frac{\sin C}{\sin A} = k$.

Hướng dẫn: Từ $\frac{\sin C}{\sin A} = k$; ta suy ra $\sin C = k.\sin A$ hay $c = ka$.

Bài toán được đưa về dựng tam giác ABC, biết ba cạnh. Điều kiện để bài toán có nghiệm là: $1 - \frac{b}{a} < k < 1 + \frac{b}{a}$.

2. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$ và $a + b = k$.

Hướng dẫn: Theo định lí hàm sin, ta có:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B} = \frac{k}{\sin\alpha + \sin\beta} \Rightarrow c = \frac{k\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha + \sin\beta};$$

bài toán quy về dựng tam giác biết một cạnh kề với hai góc.

3. Dựng tam giác ABC, biết hai cạnh a, b và bán kính đường tròn ngoại tiếp R.

Hướng dẫn: Từ giả thiết ta suy ra: $\sin A = \frac{a}{2R}$.

Dựng BC = a, trên BC dựng cung chứa góc A và dựng cung tròn tâm C bán kính b. Giao của cung chứa góc và cung tròn tâm C, bán kính b là đỉnh A. Bài toán chỉ có nghiệm, khi hai cung tròn có điểm chung.

4. Dựng tam giác ABC, biết hai cạnh a, b và $\frac{\cos A}{\cos B} = k$.

Hướng dẫn: Từ $\frac{\cos A}{\cos B} = k$, ta suy ra:

$$\frac{2bc.\cos A}{2ac.\cos B} = \frac{kb}{a} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{kb}{a} = m.$$

Từ kết quả đó ta xác định được c và quy bài toán về dạng quen thuộc.

5. Dựng tam giác ABC, biết cạnh a, góc $A = \alpha$ và $\frac{\sin C}{\sin B} = k$.

6. Dựng tam giác ABC, biết hai cạnh a, b và đường cao h_c.

Tìm tập hợp điểm

1. Trên đường thẳng cho ba điểm phân biệt cố định A, B, C theo thứ tự đó. Với mỗi điểm M không nằm trên đường thẳng AC ta dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MAB và MBC. Tìm tập hợp M sao cho tỉ số bán kính hai đường tròn đó không đổi.

ĐS: Là đường tròn Apônôliut (trừ 2 điểm) hoặc một đường thẳng.

Các bài toán cực trị

1. Hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm A và B. Một cát tuyến qua A cắt hai đường tròn tại các điểm M và M' khác A và B. Tìm vị trí của MM' để bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BMM' lớn nhất.

2. Trong số các tam giác ABC có góc $A = \alpha > 90^\circ$ và chu vi bằng 2. Tam giác nào có diện tích lớn nhất ?

3. Cho tam giác ABC có 3 góc cùng nhọn. Tìm trên cạnh BC điểm M sao cho khoảng cách chân các đường vuông góc hạ từ M xuống AB và AC ngắn nhất.

4. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$ và tia Oz nằm trong góc đó sao cho $\widehat{xOz} = 30^\circ$. Trên Oz ta lấy điểm M sao cho OM = 1. Đường thẳng (d) đi qua M cắt Ox và Oy lần lượt tại A và B. Kí hiệu α là góc nhọn tạo bởi (d) và Ox. Tìm giá trị của α sao cho $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BM}$ lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Hướng dẫn: Áp dụng định lí hàm sin cho các tam giác OAM và OBM, ta có:

$$\frac{OM}{AM} = \frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ} = 2\sin\alpha, \qquad \frac{OM}{BM} = \frac{\cos\alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AM} + \frac{1}{BM} = 2\sin\alpha + \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$$

và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky cho vế phải.

32. TỔNG VÀ HIỆU BÌNH PHƯƠNG CÁC KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN HAI ĐẦU MÚT CỦA MỘT ĐOẠN THẲNG

Phát biểu các hệ thức

Cho đoạn AB và điểm C bất kì, ta kí hiệu M là trung điểm của đoạn AB, H là hình chiếu của C trên trục AB, khi đó:

$$CA^2 + CB^2 = 2CM^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$CA^2 - CB^2 = 2.\,AB\,.\,MH$$

33. DÙNG CÁC HỆ THỨC VÀO VIỆC GIẢI TOÁN

Tính các yếu tố hình học

Ví dụ 1. Tính ba cạnh tam giác, biết $\hat{A} = 60^\circ$, $m_a = 8$, $b + c = a\sqrt{3}$.

Giải

Xuất phát từ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow a^2 = (b + c)^2 - 3bc$

$\Rightarrow 3bc = 2a^2.$

Ta lại có: $a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{1}{2}b^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 128 + \frac{1}{2}b^2$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3bc = 2a^2 \\ a^2 + c^2 = 128 + \frac{1}{2}b^2 \\ b + c = a\sqrt{3} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $a = 8\sqrt{3}$, $b = 16$, $c = 8$.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 2. Cho đoạn AB = 2a và số k.

i) Tìm tập hợp điểm C sao cho $CA^2 + CB^2 = k^2$

ii) Tìm tập hợp điểm C sao cho $CA^2 - CB^2 = k$.

Giải

i) Gọi O là trung điểm của đoạn AB, ta có:

$$CA^2 + CB^2 = 2OC^2 + \frac{1}{2}AB^2 \Leftrightarrow k^2 = 2OC^2 + 2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2OC^2 = k^2 - 2a^2.$$

Nếu $k^2 - 2a^2 > 0$, thì tập hợp C là một đường tròn: $\left(O;\ R = \sqrt{\frac{k^2 - 2a^2}{2}}\right)$

Nếu $k^2 - 2a^2 = 0$, thì tập hợp C là một điểm.

Nếu $k^2 - 2a^2 < 0$, thì tập hợp C rỗng.

ii) Gọi H là hình chiếu của C trên trục AB, ta có:

$$CA^2 - CB^2 = 2AB.OH \Leftrightarrow k = 4a.OH \quad (\text{coi } AB > 0)$$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{4a}{k}.$$

Hệ thức này chứng tỏ hình chiếu của C trên AB cố định và tập C là đường thẳng (d) ⊥ AB tại H.

Dựng hình

Ví dụ 3. Dựng tam giác ABC, biết BC = a, $\hat{A} = \alpha$, $AB^2 - AC^2 = m^2$.

Giải

Giả sử ABC là tam giác đã dựng được, khi đó đỉnh A thuộc cung chứa góc

α được dựng trên dây BC = a. Gọi H là hình chiếu của A trên trục BC. O là trung điểm của đoạn BC

$\Rightarrow b^2 = 2a.OH \Rightarrow \overrightarrow{OH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$ và A thuộc đường thẳng (d) ⊥ BC tại H. Từ đó ta suy ra cách dựng.

Dựng BC = a và cung chứa góc α trên BC. Dựng điểm H sao cho $OH = \frac{b^2}{2a}$ và $\overrightarrow{OH} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$. Dựng đường thẳng (d) ⊥ BC tại H. Giao điểm A của (d) và cung chứa góc α là đỉnh thứ 3 của tam giác. Bài toán có nghiệm hay vô nghiệm phụ thuộc vào (d) và cung chứa góc có điểm chung khác B và C.

- Nếu $b^2 < a^2$, thì bài toán có 2 nghiệm.
- Nếu $b^2 \geq a^2$, thì bài toán vô nghiệm.

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 4. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $AC \perp BD$ là: $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

Giải

- *Cần:* Gọi H là giao điểm của BC và BD, ta có:

$$AB^2 - AD^2 = 2BD.MH \qquad (*)$$

$$CB^2 - CD^2 = 2\overline{BD}.\overline{MH} \qquad (**)$$ trong đó M là trung điểm của BD.

Từ (*) và (**) ta suy ra điều cần chứng minh.

- *Đủ:* $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2$

$$\Leftrightarrow 2BD.MH = 2\overline{BD}.\overline{MH'}$$

trong đó H và H' là hình chiếu của A và C trên trục BD

$$\Rightarrow \overline{MH} = \overline{MH'} \Rightarrow H \equiv H' \Rightarrow AC \perp BD.$$

Ví dụ 5. (Định lí Cácnô).

Điều kiện cần và đủ để các đường thẳng đi qua ba điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB của tam giác ABC đồng quy là:

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0.$$

Giải

- *Cần:* Giả sử các đường thẳng đó cắt nhau tại M, ta có:

$$MB^2 - MC^2 = A_1B^2 - A_1C^2$$

$$MC^2 - MA^2 = B_1C^2 - B_1A^2$$

$$MA^2 - MB^2 = C_1A^2 - C_1B^2$$

Cộng các kết quả đó ta suy ra điều cần chứng minh.

• *Đủ*: Gọi M là giao của hai đường thẳng đi qua A_1, B_1 vuông góc với BC, CA (sự tồn tại của M là do A, B, C không thẳng hàng), khi đó:

$$MB^2 - MC^2 = A_1B^2 - A_1C^2$$

$$MC^2 - MA^2 = B_1C^2 - B_1A^2$$

$$\Rightarrow \quad MB^2 - MA^2 = A_1B^2 - A_1C^2 + B_1C^2 - B_1A^2 = C_1B^2 - C_1A^2$$

và đẳng thức chứng tỏ M, C_1 cùng nằm trên đường thẳng vuông góc với AB.

34. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Tính các yếu tố hình học

1. Cho tam giác ABC, biết: $h_a = 8$, $h_b = 6$, $m_c = 5$. Tính cosC.

Hướng dẫn: Kẻ trung tuyến CM và hạ MP ⊥ AC, MQ ⊥ BC. Tứ giác CPMQ nội tiếp trong đường tròn đường kính CM = 5 ⇒ PQ = 5sinC. Theo định lí hàm cos cho tam giác MPQ, ta có:

$$PQ^2 = 25 + 24\cos C, \quad \text{vì vậy} \quad 25\sin^2 C = 25 + 24\cos C$$

$$\Rightarrow \quad 25\cos^2 C + 24\cos C = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos C = 0 \quad \text{hoặc} \quad \cos C = -\frac{24}{25}$$

2. Tính ba cạnh tam giác ABC, biết: $b + c = 7$, $b - c = \frac{a}{2}$, $m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

Hướng dẫn: $b^2 + c^2 + 2bc = 49 \quad \Rightarrow \quad 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} + 2bc = 49$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 4bc = 52.$$

Mặt khác ta có: $4bc = 49 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3a^2}{4} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$$\Rightarrow \quad b = 4, \quad c = 3$$

3. Tính các cạnh b, c của tam giác ABC, biết $a = \sqrt{14}$, $bc = 12$, $m_a = 3$.

Hướng dẫn: Ta có $b^2 + c^2 = 25$ và bài toán được đưa về giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} bc = 12 \\ b^2 + c^2 = 25 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = 4, c = 3$$

4. Tính cosC, biết $h_a = 3\sqrt{3}$, $h_b = 4\sqrt{3}$, $m_a = 2\sqrt{7}$.

Hướng dẫn: Kí hiệu AM là trung tuyến của tam giác ABC, AH là đường cao, MK ⊥ AC.

Rõ ràng: $MH = 1$, $MK = 2\sqrt{3}$. Tứ giác AHMK nội tiếp, nên $KH = 2\sqrt{7}\cos C$, theo định lí hàm cos cho tam giác MKH ta có:

$$KH^2 = 13 + 4\sqrt{3}\sin C \quad \Rightarrow \quad 28(1 - \sin^2 C) = 13 + 4\sqrt{3}\sin C$$

$$\Rightarrow \quad 28\sin^2 C + 4\sqrt{3}\sin C - 15 = 0.$$

5. Tính cạnh a của tam giác ABC, biết $m_a = 3$, $m_b = \frac{3}{2}$, $S = 3$.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác, AM là trung tuyến, rõ ràng

$$2dt\,\Delta BGM = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = 1 \quad (\alpha = \widehat{BGM}).$$

6. Tính sinA, biết: $a = 3$, $m_a = 2$, $h_b^2 + h_c^2 = \frac{5}{2}$.

Chứng minh các tính chất hình học

1. Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu $a^2 + b^2 = 2c^2$, thì:

$$a.m_b + b.m_a = 2c.m_c.$$

Hướng dẫn: Từ $\quad a^2 + b^2 = 2.m_c^2 + \frac{c^2}{2}$, $\quad$ ta suy ra:

$$2c^2 = 2.m_c^2 + \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Tương tự ta có: $\quad b^2 + c^2 = 2.m_a^2 + \frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad m_b = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

2. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$, thì tam giác đó vuông.

3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC nếu $b > c$ thì $m_c > m_b$.

4. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

5. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có: $\quad \frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{c^2} \geq \frac{9}{4}$.

6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có: $\quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \frac{27}{4}R^2$.

7. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có: $\quad m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$.

8. Chứng minh rằng nếu tam giác không cân và thỏa mãn điều kiện

$$b.m_b = c.m_c \quad \text{thì} \quad b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Hướng dẫn: Từ $\frac{b}{c} = \frac{m_b}{m_c} \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$.

$$\Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}}{a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow b^4 - c^4 = a^2(b^2 - c^2).$$

9. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\widehat{BGC} > 90^\circ$, thì $\widehat{A} < 45^\circ$.

10. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn, thì:

$$2(m_a + m_b + m_c) > a + b + c.$$

Hướng dẫn: Hãy chứng minh rằng: $2m_a > a$.

11. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn, thì:

$$(m_a + m_b + m_c) > 4R.$$

Hướng dẫn: Nếu tam giác ABC nhọn, thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nằm trong nó. Gọi G là trọng tâm tam giác, O là tâm đường tròn, khi đó O phải thuộc vào một trong ba tam giác GAB, GBC, GCA.

12. Chứng minh rằng trong một tam giác nhọn ABC, thì:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 > \frac{16}{3}R^2.$$

13. Tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^\circ$. Chứng minh rằng:

$$m_b + m_c - m_a > p - a.$$

14. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc nhọn, thì:

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \frac{R}{r} + 1.$$

Hướng dẫn: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn, nên O nằm trong tam giác và thỏa các bất đẳng thức sau:

$$m_a \leq R + OA_1, \quad m_b \leq R + OB_1, \quad m_c \leq R + OC_1$$

$$\Rightarrow \frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)R + \frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c}$$

Chú ý rằng: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ và $\frac{OA_1}{h_a} + \frac{OB_1}{h_b} + \frac{OC_1}{h_c} = 1$.

15. Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 và tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy, thì các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 cũng đồng quy.

Hướng dẫn: Dùng định lí Các nô, xem ví dụ 5.

16. Cho tứ giác lồi ABCD. Ta kí hiệu A_1, B_1, C_1 lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A, B, C tương ứng vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 đồng quy.

Hướng dẫn: Dùng định lí Các nô.

17. AA_1, BB_1, CC_1 là các đường cao của tam giác ABC. A_2, B_2, C_2 là hình chiếu của A, B, C trên các đường thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A_2, B_2, C_2 tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Hướng dẫn: Dùng định lí Các nô.

Dựng hình

1. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, R, $AB^2 - AC^2 = k$.

Hướng dẫn: Dựng $BC = 2R\sin\alpha$. Trên BC dựng cung chứa góc α. Gọi M là trung điểm của BC, dựng điểm H sao cho $2BC.MH = k$. Dựng đường thẳng (d) vuông góc với BC tại H. Giao của (d) và cung chứa góc là đỉnh A.

2. Dựng tam giác ABC, biết $\widehat{A} = \alpha$, R, $AB^2 + AC^2 = k^2$.

Hướng dẫn: Dựng $BC = 2R\sin\alpha$. Trên BC dựng cung chứa góc α. Gọi M là trung điểm của BC, dựng cung tròn tâm M,

bán kính $r = \sqrt{\dfrac{k^2 - 2R^2\sin^2\alpha}{2}}$. Giao điểm của hai cung là đỉnh A.

3. Dựng hình bình hành ABCD, biết AB = a, $AC^2 + BD^2 = k^2$ và góc tạo bởi hai đường chéo AC, BD bằng α.

Hướng dẫn: Gọi O là giao điểm các đường chéo. Bài toán quy về dựng O, biết AB = a, $\widehat{AOB} = \alpha$ và $OA^2 + OB^2 = 4k^2$.

4. Dựng tam giác ABC, biết BC = a, $AC^2 + AB^2 = 5a^2$ và trung tuyến AM = m.

Tìm tập hợp điểm

1. Cho hai điểm phân biệt B, C và số thực $k \neq 0$. Tìm tập hợp điểm A sao cho $AB^2 - AC^2 = k.S$ (S là diện tích tam giác ABC).

Hướng dẫn: Gọi M là trung điểm của BC, H là chân đường cao của tam giác; từ:

$$AB^2 - AC^2 = 2BC.MH \qquad \text{và} \qquad 2S = AH.BC$$

$$\Rightarrow \quad 4MH = 2kAH \quad \Rightarrow \quad \cot g\alpha = \frac{k}{2} \text{ không đổi}$$

trong đó α là góc tạo bởi AH và MH.

Điều đó chứng tỏ A thuộc một trong hai tia cố định xuất phát từ M.

2. Cho tam giác vuông ABC ($\widehat{C} = 1v$). Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 = 2MC^2.$$

Hướng dẫn: Gọi E là trung điểm của cạnh AB, từ:

$$MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + 2CE^2 \qquad \text{và} \qquad MA^2 + MB^2 = 2MC^2$$

$$\Rightarrow \qquad MC^2 - ME^2 = CE^2.$$

Điều đó chứng tỏ M thuộc một đường thẳng cố định.

3. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 2.

4. Cho hình bình hành ABCD va số thực k. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2.$$

ĐS: Là một đường tròn hoặc một điểm hoặc tập rỗng.

5. Cho hình vuông ABCD cạnh AB = 1. Tìm tập hợp điểm M sao cho

$$MA^2 + MC^2 = 4MD^2 - 2MB^2.$$

35. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VỀ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

1. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Định nghĩa:

Phương tích của một điểm M đối với đường tròn (O; R) là một số thực bằng $OM^2 - R^2$ và được kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$

Các tính chất:

i) Nếu $\mathscr{P}_{M/(O)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ M nằm ngoài (O; R);

$\mathscr{P}_{M/(O)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ M nằm trong (O; R);

$\mathscr{P}_{M/(O)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ M nằm trên (O; R).

ii) Nếu A, B là giao điểm của một đường thẳng đi qua M và (O; R), thì

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \mathscr{P}_{M/(O)}$$

Hệ quả:

i) Nếu A, B và C, D là các cặp giao điểm của hai đường thẳng đi qua M và đường tròn (O; R), thì $MA.MB = MC.MD$ (*). Đảo lại nếu (*) được thỏa mãn, thì 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

ii) Nếu MT là tiếp tuyến của (O; R), T là tiếp điểm, thì $MT^2 = \mathscr{P}_{M/(O)}$. Đảo lại nếu hai cát tuyến MAB và MT thỏa mãn điều kiện $MT^2 = \overline{MA}.\overline{MB}$, thì đường tròn đi qua ba điểm A, B, T tiếp xúc với đường thẳng MT tại điểm T.

2. Trục đẳng phương của hai đường tròn

Cho hai đường tròn không đồng tâm. Tập hợp điểm có cùng phương tích với cả hai đường tròn là một đường thẳng. Đường thẳng đó được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn.

Các tính chất:

i) Trục đẳng phương vuông góc với đường thẳng đi qua tâm của cả hai đường tròn.

ii) Mỗi cặp đường tròn không đồng tâm bao giờ cũng có duy nhất một trục đẳng phương.

iii) Nếu hai đường tròn cắt nhau, thì trục đẳng phương của chúng là đường thẳng đi qua các điểm chung của hai đường tròn. Nếu hai đường tròn tiếp xúc, thì trục đẳng phương là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm. Nếu hai đường tròn không có điểm chung và một đường tròn bất kì cắt đồng thời cả hai đường tròn đó, thì giao điểm các dây cung chung (hoặc phần kéo dài của các dây đó) nằm trên trục đẳng phương.

Hệ quả:

Nếu một trong hai đường tròn có điểm chung với trục đẳng phương, thì đường tròn kia cũng có điểm chung với trục đẳng phương và hai đường tròn có điểm chung. Nếu một trong hai đường tròn không có điểm chung với trục đẳng phương, thì đường tròn kia cũng không có điểm chung với trục đẳng phương, và cả hai đường tròn không có điểm chung.

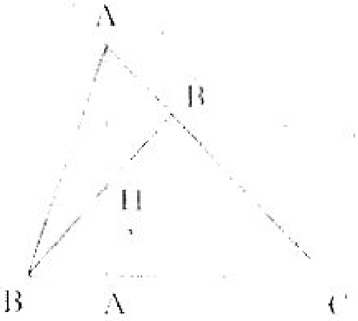
36. DÙNG PHƯƠNG TÍCH VÀ TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Bằng cách sử dụng các kết quả của lí thuyết về phương tích và trục đẳng phương, ta có thể giải được nhiều dạng toán hình học liên quan đến đường tròn. Ta xét các ví dụ sau:

Tính các yếu tố hình học

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $BC = a$ và $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi H là trực tâm tam giác. Tính độ dài đoạn AH.

Giải



Gọi A' và B' là chân các đường cao hạ từ A và B. Tứ giác A'HB'C nội tiếp trong đường tròn, do đó ta có:

$$\overline{AH}.\overline{AA'} = \overline{AB'}.\overline{AC}$$

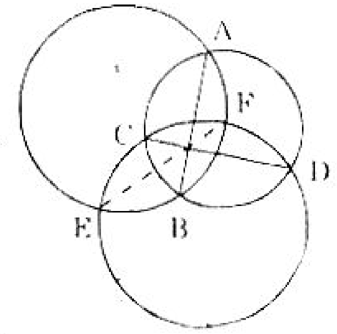
$$\Rightarrow \quad AH.AA' = AB.AC.|\cos\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad AH = a|\text{cotg}\alpha|$$

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 2. Cho ba đường tròn đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng ba dây cung chung của chúng đồng quy.

Giải

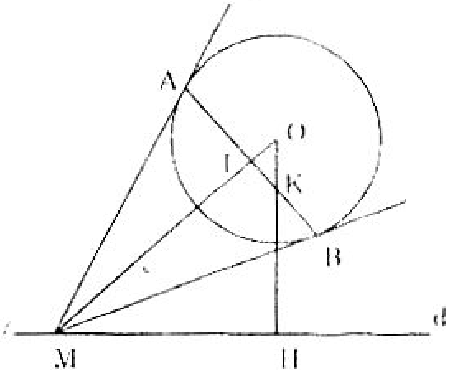


Giả sử O_1, O_2, O_3 là ba đường tròn cắt nhau đôi một và AB, CD, EF là các dây cung. Gọi M là giao của AB và CD. Ta chứng minh rằng EF đi qua M.

Thật vậy $\mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_2)}$ vì M thuộc trục đẳng phương của O_1 và O_2; $\mathscr{P}_{M/(O_2)} = \mathscr{P}_{M/(O_3)}$ vì M thuộc trục đẳng phương của O_2 và O_3. Từ đó ta suy ra $\mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_3)}$ và đây là điều cần chứng minh.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (O; R), đường thẳng (d) không có điểm chung với đường tròn. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d). M là điểm tùy ý trên (d) và khác H. Từ M ta kẻ tới (O; R) các tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Gọi I là giao điểm của MO và AB, K là giao điểm của OH và AB. Chứng minh rằng: $OI.OM = OK.OH = R^2$.

Giải



Rõ ràng tứ giác MIKH nội tiếp trong đường tròn; vì vậy ta có:

$$OI.OM = OK.OH.$$

Trong tam giác vuông AOM ta có:

$$OI.OM = R^2.$$

Kết hợp các kết quả trên cho ta điều cần chứng minh.

Ví dụ 4. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 là giao điểm của AG, BG, CG và đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Chứng minh rằng: $GA.GB.GC \leq GA_1.GB_1.GC_1$.

Giải

Ta có:

$$GA.GB.GC \le GA_1.GB_1.GC_1 \quad \Rightarrow \quad GA^2.GB^2.GC^2 \le (R^2 - OG^2)^3 \qquad (*)$$

Ta chứng minh rằng (*) đúng. Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$GA^2.GB^2.GC^2 \le \left(\frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3}\right)^3$$

ta cần chứng tỏ: $\dfrac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3} = R^2 - OG^2.$

Thật vậy, xuất phát từ:

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow \quad 9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow \quad 9(R^2 - OG^2) = (a^2 + b^2 + c^2)$$

Mặt khác: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{9} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

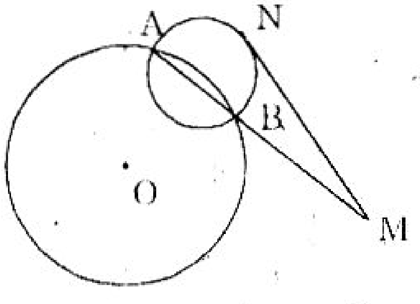
$$\Rightarrow \quad \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

và đây là điều cần chứng minh.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 5. Cho đường tròn (O; R) điểm N không trùng với tâm O và dây AB của đường tròn (O; R). Ta kí hiệu M là giao điểm của AB và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua ba điểm A, B, N. Tìm tập hợp M, khi AB biến thiên.

Giải



Ta kí hiệu O' là đường tròn đi qua ba điểm A, B, N. Rõ ràng AB là trục đẳng phương của O và O', vì vậy:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \mathscr{P}_{M/(O')} \quad \Leftrightarrow \quad MO^2 - MN^2 = R^2.$$

Hệ thức đó chứng tỏ tập M thuộc một đường thẳng (d) cố định vuông góc với ON. Đảo lại nếu M thuộc (d), thì: $MO^2 - MN^2 = R^2 \Rightarrow \mathscr{P}_{M/(O)} = \mathscr{P}_{M/(O')} = MN^2$

$\Rightarrow$ MN là tiếp tuyến của O'.

Dựng hình

Ví dụ 6. Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm về một phía với (d) (AB cắt (d)). Hãy dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với (d).

Giải

- *Phân tích:* Giả sử O là đường tròn đã dựng được. Gọi T là tiếp điểm của O và (d), S là giao điểm của (d) và AB. Ta có:

$$SA.SB = ST^2 \Rightarrow \quad ST = \sqrt{SA.SB}$$

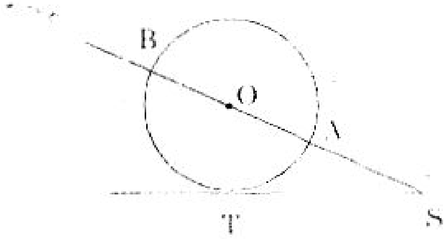
- *Cách dựng:* Dựng điểm T sao cho:

$$ST = \sqrt{SA.SB}$$

  Dựng đường tròn đi qua ba điểm A, B, T.

  Đó là đường tròn cần dựng.

- *Biện luận:* Bài toán có hai nghiệm.

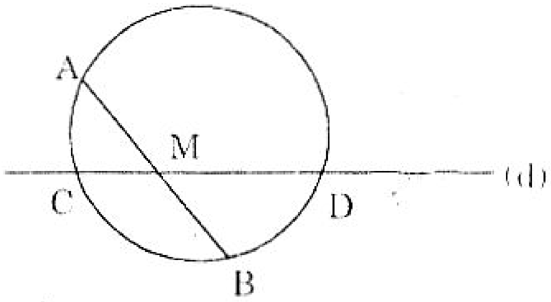


Bài toán cực trị

Ví dụ 7. Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm khác phía với (d), cắt (d) tại điểm M, biết MA = a, MB = b.

Đường tròn đi qua A, B cắt (d) tại các điểm C, D. Tính độ dài ngắn nhất của đoạn CD.

Giải



Vì M thuộc dây cung CD, nên M nằm trong đường tròn O và ta có:

$$MC.MD = MA.MB = a.b.$$

Mặt khác:

$$MC + MD = CD \geq 2\sqrt{MC.MD} = 2\sqrt{a.b}$$

$$\Rightarrow \quad \min CD = 2\sqrt{a.b} \quad \text{khi} \quad MC = MD = \sqrt{a.b}.$$

37. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Tính các yếu tố hình học

1. Cho tam giác vuông cân ABC ($\hat{C} = 1v$) nội tiếp trong đường tròn (O; R). Đường tròn O' tiếp xúc với cạnh BC tại trung điểm của BC và tiếp xúc với cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của (O; R). Tính độ dài tiếp tuyến của O' kẻ từ A.

   ĐS: $\dfrac{R(2+\sqrt{2})}{2}$.

2. Cho tam giác cân ABC có AB = AC = 1, BC = a nội tiếp trong đường tròn O. Một dây cung MN của O cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, Q sao cho MP = PQ = QN. Tính độ dài MN.

ĐS: Nếu $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, thì $MN = \frac{3a}{2a^2+1}$ hoặc $MN = \frac{3a}{\sqrt{9-2a^2}}$;

Nếu $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{3\sqrt{2}}{2}$, thì $MN = \frac{3a}{2a^2-1}$.

3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R) có độ dài ba cạnh là a, b, c. G là trọng tâm của tam giác. Tính $\mathscr{P}_{G/(O)}$ theo a, b, c, R.

ĐS: $\mathscr{P}_{G/(O)} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R) có độ dài ba cạnh là a, b, c. H là trực tâm của tam giác. Tính $\mathscr{P}_{H/(O)}$ theo a, b, c, R.

ĐS: $\mathscr{P}_{H/(O)} = 8R^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R) và ngoại tiếp đường tròn (O'; r). Tính $\mathscr{P}_{O'/(O)}$ theo R và r.

Hướng dẫn: Gọi D là giao điểm của AO' và đường tròn O, khi đó:

$$\mathscr{P}_{O'/(O)} = -O'A.O'D \ (*). \quad \text{Ta có:}$$

$$O'A = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}, \qquad O'D = BD = 2R.\sin\frac{A}{2} \ \Rightarrow \ \mathscr{P}_{O'/(O)} = -2Rr.$$

6. Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R) có độ dài các cạnh là a, b, c, d và các đường chéo m, n. Kí hiệu G là trọng tâm của tứ giác.

Tính $\mathscr{P}_{G/(O)}$ theo các yếu tố đã cho.

ĐS: $\mathscr{P}_{G/(O)} = -\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+m^2+n^2-6R^2}{8}$.

7. Cho ba đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$, $(O_3; R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau tại các điểm A, B, C. Tính bán kính đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

Hướng dẫn: Chứng tỏ rằng đường tròn đi qua A, B, C là đường tròn nội tiếp tam giác $O_1O_2O_3$. Bán kính đường tròn đó bằng $\sqrt{\frac{R_1R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}}$.

8. Cho đường tròn (O; R) và điểm P nằm trong đường tròn, có khoảng cách đến tâm O bằng d; AC và BD là hai dây cung của (O; R) vuông góc với nhau tại P.

i) Tính tổng: $AC^2 + BD^2$ theo R và d.

ii) Tính tổng: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

ĐS: i) $4(2R^2 - d^2)$; ii) $8R^2$.

9. Cho đường tròn (O; R) và điểm P nằm trong đường tròn, có khoảng cách đến tâm O bằng d; AC và BD là hai dây cung của (O; R) cắt nhau tại P và hợp với OP các góc nhọn α, β.

i) Tính tổng: $AC^2 + BD^2$. ii) Tính tổng: $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 8.

i) $4(2R^2 - d^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta))$. ii) $4(R^2 + d^2(\cos^2\alpha - \sin^2\beta))$.

10. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) tiếp xúc ngoài với nhau tại M. Trên đường tròn (O; R) ta lấy điểm A và kẻ từ đó tới (O'; r) tiếp tuyến AT (T là tiếp điểm), biết AM = a. Hãy tính AT.

ĐS: $AT = a\sqrt{\dfrac{R + r}{R}}$.

11. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) và đường tròn O tiếp xúc với các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm M, M' và cắt BC tại N và N', biết AM = a, BM = b. Tính AN.

ĐS: $AN = \sqrt{a(a + 2b)}$.

12. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r) (R > r). Trên (O; r) ta lấy điểm M và kẻ qua đó đường thẳng (d) cắt (O; R) tại các điểm B và C. Đường thẳng vuông góc với (d) tại M cắt (O; r) tại A.

Tính tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

ĐS: $2(R^2 + r^2)$.

13. Giả sử các cặp cạnh đối của tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R) cắt nhau tại các điểm P và Q, biết rằng khoảng cách từ P và Q đến tâm đường tròn tương ứng bằng p và q. Tính độ dài PQ.

Hướng dẫn: Hãy dựng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC và QCD và gọi K là điểm chung thứ hai của hai đường tròn đó.

Vì $\mathscr{P}_{(P/PBC)} = \mathscr{P}_{(P/O)} > 0$ và $\mathscr{P}_{(Q/QCD)} = \mathscr{P}_{(Q/O)} > 0$,

nên K thuộc đoạn PQ $\Rightarrow$ $PQ = PK + QK = \sqrt{p^2 + q^2 - 2R^2}$.

14. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Đường tròn O_3, tiếp xúc ngoài đồng thời với hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ lần lượt tại các điểm B và C. Giả sử các đường thẳng O_1O_2 và BC cắt nhau tại P. Tính độ dài tiếp tuyến kẻ từ P tới O_3 theo R_1 và R_2.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ đường tròn đi qua A, B, C là đường tròn nội tiếp trong tam giác $O_1O_2O_3$ và khi đó BC là trục đẳng phương của đường tròn đó và O_3. Vì vậy độ dài tiếp tuyến kẻ từ P đến O_3 bằng PA.

Chứng minh các tính chất hình học

1. Kí hiệu E, F là trung điểm các cạnh AB, AC của tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác đó, biết rằng bốn điểm A, E, G, F nằm trên cùng một đường tròn. Chứng minh rằng: $b^2 + c^2 = 2a^2$.

Hướng dẫn: Xuất phát từ BE.BA = BG.BF

$$\Rightarrow \quad 2m_b^2 = \frac{3c^2}{2} \quad \text{và} \quad 2m_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}.$$

2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 là giao điểm của AG, BG, CG và đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

i) $$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} \geq \frac{(\sqrt{GA_1} + \sqrt{GB_1} + \sqrt{GC_1})^2}{3(R^2 - d^2)}$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, d là khoảng cách từ tâm đường tròn đến G.

ii) $$\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} \leq \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}.$$

Hướng dẫn: i) Xem cách giải của ví dụ 1.

ii) $$\frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GB_1} + \frac{1}{GC_1} = \frac{GA}{GA.GA_1} + \frac{GB}{GB.GB_1} + \frac{GC}{GC.GC_1} \ldots$$

$$= \frac{GA + GB + GC}{R^2 - OG^2} \leq \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}$$

3. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn O và O' là đường tròn tiếp xúc với O. Ta kí hiệu x, y, z là độ dài các đoạn tiếp tuyến kẻ từ các đỉnh tam giác đến đường tròn O'.

i) Chứng minh rằng trong ba số thực x, y, z có một số bằng tổng hai số kia.

ii) Chứng minh rằng: $x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$.

Hướng dẫn: Sử dụng bài 10 (trong phần *tính các yếu tố hình học*).

4. Cho đường tròn O, đường thẳng (d) không có điểm chung với O. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống (d). M là điểm tùy ý trên (d). Từ M kẻ tới O hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là các tiếp điểm). Chứng minh rằng khi M thay đổi trên (d), thì đường thẳng AB cắt OH tại một điểm cố định.

Hướng dẫn: Xem ví dụ 3.

5. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC ta lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, C_1 và dựng các đường tròn đường kính AA_1, BB_1, CC_1.

Chứng minh rằng các dây cung chung của các cặp đường tròn cắt nhau tại trực tâm tam giác ABC.

6. ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn (O; R). Giả sử AB và CD cắt nhau tại P, AD và BC cắt nhau tại Q, AC và BD cắt nhau tại M.

Chứng minh rằng tâm O là trực tâm tam giác MPQ.

Hướng dẫn: Sử dụng kết quả bài 13 (trong phần *tính các yếu tố hình học*).

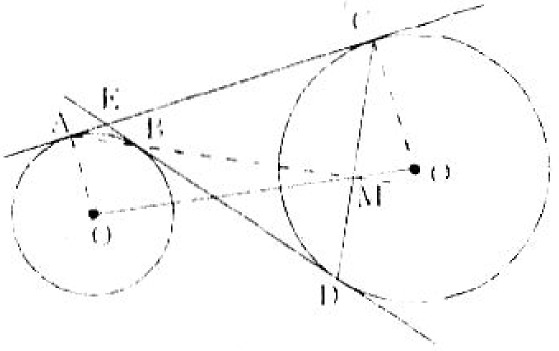
7. Hai đường tròn O và O' cắt nhau tại A và B. Trên đường thẳng AB và về phía ngoài đường tròn O ta lấy điểm S. Từ S kẻ tới O hai tiếp tuyến SM và SN (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng AM cắt O lần thứ hai tại P và đường thẳng AN cắt O lần thứ hai tại Q.

Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm của dây cung PQ.

8. Cho hai đường tròn O và O' nằm ngoài nhau và nhận AC làm tiếp tuyến chung ngoài (A ∈ O, C ∈ O'), BD làm tiếp tuyến chung trong (B ∈ O, D ∈ O').

Chứng minh rằng AB, CD và OO' đồng quy.

Hướng dẫn: Gọi E là giao của BD và AC, khi đó: OE ⊥ O'E ⇒ O'E // AB. Gọi M là giao của AB và CD ⇒ M là giao của hai đường tròn đường kính AC và BD. Ta xét phương tích của các điểm O và O' đối với hai đường tròn AC và BD. Ta có:



$$\mathscr{P}_{O/(AC)} = OA^2 = OB^2 = \mathscr{P}_{O/(BD)};$$

$$\mathscr{P}_{O'/(AC)} = O'C^2 = O'D^2 = \mathscr{P}_{O'/(BD)}.$$

Các hệ thức đó chứng tỏ O và O' cùng phương tích đối với hai đường tròn đường kính AC và BD và do đó OO' là trục đẳng phương của chúng.

9. Đường tròn nội tiếp trong tứ giác ABCD, tiếp xúc với AB, BC, CD, DA tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Với số a > 0 cho trước ta dựng đường tròn S_1 sao cho AB và CD làm các tiếp tuyến chung ngoài của S_1 và O và độ dài các tiếp tuyến đó bằng a. Tương tự AD và BC làm các tiếp tuyến chung ngoài của S_2 và O và độ dài các tiếp tuyến đó bằng a (ký hiệu M', P' là các tiếp điểm tương ứng của S_1 trên AB và CD; N', Q' là các tiếp điểm tương ứng của S_2 trên AD và BC sao cho:

$$\overrightarrow{MM'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{PP'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{NN'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{QQ'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$$

i) Chứng minh rằng AC là trục đẳng phương của S_1 và S_2.

ii) Chứng minh rằng AC, DM, BQ đồng quy.

Hướng dẫn:

i) Từ MM' = PP' = a $\Rightarrow$ CP = CN' $\Rightarrow$ $\mathscr{P}_{C/(S_1)} = \mathscr{P}_{C/(S_2)}$;

AM = AQ $\Rightarrow$ $\mathscr{P}_{A/(S_1)} = \mathscr{P}_{A/(S_2)}$

ii) Ta dựng đường tròn S_3 tiếp xúc với AB tại M'' và với AD tại Q'' sao cho

$$MM'' = QQ'' = a \quad \text{và} \quad \overrightarrow{MM''} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{QQ''} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DA}$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{P}_{M/(S_2)} = \mathscr{P}_{M/(S_1)}; \quad \mathscr{P}_{D/(S_2)} = \mathscr{P}_{D/(S_3)}$$

Gọi I là giao điểm của DM và AC, ta có

$$\mathscr{P}_{I/(S_1)} = \mathscr{P}_{I/(S_2)}; \quad \mathscr{P}_{I/(S_2)} = \mathscr{P}_{I/(S_3)}$$

10. Giả sử A, B, C, D theo thứ tự là các điểm phân biệt trên đường thẳng (d). Đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X và Y. Trên đường thẳng XY ta lấy điểm O (O $\notin$ (d)), đường thẳng OC cắt lần thứ hai đường tròn đường kính AC tại M, đường thẳng OB cắt lần thứ hai đường tròn đường kính BD tại N. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN, XY đồng quy.

Hướng dẫn: Rõ ràng bốn điểm B, C, M, N nội tiếp $\Rightarrow$ A, M, N, D nội tiếp. Gọi S là giao của AM và DN, khi đó phương tích của S đối với các đường tròn đường kính AC và BD bằng nhau.

11. Trên cạnh BC của tam giác ABC ta lấy điểm A'. Giả sử đường trung trực của đoạn BA' cắt cạnh AB tại M. Đường trung trực của đoạn A'C cắt cạnh AC tại N. Chứng minh rằng điểm đối xứng của A' qua đường thẳng MN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn: Kẻ qua A đường thẳng x // BC và x cắt A'N tại C', A'M tại B'. Rõ ràng các tam giác ANC' và AMB' cân tại N và M. Gọi O và O' là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và A'B'C', ta có:

$$\mathscr{P}_{(M/O)} = \mathscr{P}_{(M/O')} = MB.MA = MA'.MB';$$

$$\mathscr{P}_{(N/O)} = \mathscr{P}_{(N/O')} \Rightarrow \text{M, N thuộc dây cung chung của O và O'.}$$

Mặt khác: AB = A'B', AC = A'C' $\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ $\Rightarrow$ O và O' đảng tích, MN là trục đối xứng của O và O'.

12. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên đường tròn O ta lấy điểm C (khác A và B) và hạ CD $\perp$ AB. Kéo dài CD (về phía D) thêm một đoạn DE = AC. Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{(E/O)} > 0$ và tiếp tuyến EF của đường tròn O có độ dài bằng AD.

Hướng dẫn: Gọi K là giao điểm của CD và O, ta có:

$$ED = AC > CD = KD. \mathscr{P}_{(E/O)} = EK.EC = ED^2 - CD^2.$$

13. Cho đường tròn (O; R) và điểm A không nằm trên (O; R) và không trùng với tâm O. Gọi O' là một đường tròn bất kì đi qua O và A cắt đường tròn (O; R) tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn: Ta xét hai trường hợp:

- *TH_1:* A nằm trong (O; R). Hãy dựng đường thẳng qua A và vuông góc với OA cắt (O; R) tại hai điểm B, C. Tiếp tuyến tại các điểm B và C của (O; R) cắt nhau tại S, khi đó S cố định và ta chứng tỏ PQ đi qua S. Thật vậy: $\mathscr{P}_{S/O} = SA.SO \Rightarrow$ S có cùng phương tích với O và O' $\Rightarrow S \in$ PQ.
- *TH_2:* A nằm ngoài (O; R), trường hợp này ta kí hiệu S là giao của PQ và OA. Dựng đường thẳng vuông góc với OA tại A cắt O' tại M. Rõ ràng MP và MQ tiếp xúc với (O; R) và bài toán đưa về dạng quen thuộc (xem ví dụ 3).

14. Cho nửa đường tròn O đường kính AB và điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Đường tròn O' đường kính MH cắt MA, MB và nửa đường tròn O lần lượt tại các điểm P, Q, C.

i) Chứng minh rằng MA.MP = MB.MQ.

ii) Gọi S là giao điểm của AB và MC. Chứng minh rằng PQ đi qua S.

Hướng dẫn:

i) Dùng các hệ thức lượng trong tam giác vuông MHA và MHB có HP và HQ là các đường cao tương ứng.

ii) Chứng minh rằng S có cùng phương tích đối với O' và O'' (O'' là đường tròn đi qua bốn điểm A, P, Q, B).

15. Tứ giác ABCD ngoại tiếp một đường tròn O. Kí hiệu M, N, P, Q lần lượt là tiếp điểm nằm trên các cạnh AB, CD, BC, DA. Chứng minh rằng: MN, PQ, AC, BD đồng quy.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 9.

16. Cho ba tia SA, SB, SC và trên đó ta lấy các điểm tương ứng A', B', C' sao cho SA.SA' = SB.SB' = SC.SC' = k (k > 0 cho trước).

i) Chứng minh rằng:

$$A'B' = AB.\frac{k}{SA.SB}, \quad B'C' = BC.\frac{k}{SB.SC}, \quad C'A' = CA.\frac{k}{SA.SC}$$

ii) Chứng minh rằng AB.SC + BC.SA ≥ CA.SB (*)

iii) Chứng minh rằng để ba điểm A', B', C' thẳng hàng, điều kiện cần và đủ là dấu bằng trong (*) xảy ra.

17. *(Định lí Ptôlômê).* Chứng minh rằng để tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn, điều kiện cần và đủ là: AB.CD + AD.BC = AC.BD.

Hướng dẫn: Trên các tia DA, BD, DC ta lấy các điểm A', B', C' sao cho

$$DA.DA' = DB.DB' = DC.DC' = k,$$

sau đó dùng lại các kết quả của i) và ii) trong bài 16.

18. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB cố định và đường thẳng (d) cố định vuông góc với AB tại H (H không trùng với tâm O). Giả sử x là một đường thẳng bất kì đi qua H cắt (O; R) tại các điểm M và N. Các đường thẳng AM và AN cắt d lần lượt tại M' và N'.

i) Chứng minh rằng $\overline{AM}.\overline{AM'}$ và $\overline{AN}.\overline{AN'}$ không phụ thuộc vị trí của đường thẳng x.

ii) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, N', M' cùng nằm trên một đường tròn và tâm của đường tròn đó chạy trên một đường thẳng cố định, khi x thay đổi.

19. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') (R > R') tiếp xúc trong với nhau tại T. Trên tiếp tuyến chung tại T của hai đường tròn ta lấy điểm A (A ≠ T); đường thẳng (d) đi qua A cắt (O; R) tại B và E, cắt (O'; R') tại C và D.

Chứng minh rằng: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

20. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại H, đường tròn bàng tiếp thuộc góc A tiếp xúc với cạnh BC tại K. Gọi M là trung điểm của KH, D là chân đường phân giác trong của góc A, A' là chân đường cao hạ từ A. Chứng minh rằng: $MH^2 = \overline{MD}.\overline{MA'} = \overline{AK}.\overline{MD}$.

Hướng dẫn: Bốn điểm A', H, D, K lập thành một hàng điểm điều hòa.

21. Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Giả sử AD cắt lần thứ hai đường tròn đó tại M sao cho MA = MD. Các đoạn thẳng MB và MC cắt đường tròn nội tiếp tam giác lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng PE = QF.

22. Cho tam giác ABC và AM, BN, CE là các trung tuyến của tam giác đó. Gọi G là giao điểm của các trung tuyến, A' là giao điểm thứ hai của AG với đường tròn ngoại tiếp tam giác BGC, B' là giao điểm thứ hai của BG với đường tròn ngoại tiếp tam giác CGA, C' là giao điểm thứ hai của CG với đường tròn ngoại tiếp tam giác AGB. Chứng minh rằng:

$$MA'^2 + NB'^2 + EC'^2 \geq AM^2 + BN^2 + CE^2.$$

23. Ta kí hiệu A_1, B_1, C_1 là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB; O và R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 \geq \frac{3}{4}R^2.$$

24. Cho tam giác ABC không cân và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Ta kí hiệu A', B', C' là tiếp điểm của đường tròn I với các cạnh BC, CA, AB. Gọi M là giao điểm của B'C' với BC, N là giao điểm của A'C' với AC, K là giao điểm của A'B' với AB. Chứng minh rằng tập hợp ba điểm M, N, K cùng nằm trên một đường thẳng.

25. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Một đường tròn (O'; R') tiếp xúc trong với đường tròn O và tiếp xúc với các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm M, N.

i) Chứng minh rằng: $R' = 4R\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}$.

ii) Gọi I là trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

iii) Tìm tập hợp điểm I khi tam giác ABC thay đổi.

26. Cho hai đường tròn O và O' tiếp xúc trong với nhau (O' nằm trong đường tròn O). Trên đường tròn O ta lấy điểm A và kẻ từ đó đến O' hai tiếp tuyến AB, AC (B và C là các tiếp điểm). Đường tròn tâm A bán kính AB cắt đường tròn O tại hai điểm P và Q.

i) Chứng minh rằng PQ tiếp xúc với đường tròn O'.

ii) Giả sử PQ cắt tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại S. Chứng minh rằng đường thẳng BC đi qua S.

27. Cho hai đường tròn O_1 và O_2 có tâm không trùng nhau. Ta xét hai đường tròn có tâm phân biệt O_3 và O_4 có tính chất là O_3 trực giao với O_1 và O_2; O_4 trực giao với O_1 và O_2.

Chứng minh rằng nếu O_1 và O_2 có điểm chung thì O_3 và O_4 không có điểm chung.

Tìm tập hợp điểm

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn AD và BE là các đường cao của tam giác. Ta dựng các đường tròn O và O' tiếp xúc với nhau tại P và O đi qua hai điểm A, E còn O' đi qua hai điểm B, D. Tìm tập hợp điểm P, khi các đường tròn đó biến thiên.

Hướng dẫn: Hãy chứng minh rằng CP là tiếp tuyến chung của hai đường tròn và CP có độ dài không đổi.

2. Cho đường thẳng (d), một số thực $k \neq 0$ và điểm S cố định không nằm trên (d). Với mỗi điểm $M \in (d)$ ta dựng điểm M' sao cho $M' \in SM$ và $\overline{SM'}.\overline{SM} = k$. Tìm tập hợp điểm M', khi M biến thiên trên (d).

Hướng dẫn: Hạ SH ⊥ (d) và trên SH lấy điểm H' sao cho $\overline{SH}.\overline{SH'} = k$, khi đó H' cố định và M' nhìn SH' dưới một góc vuông. Tập M' là đường tròn đường kính SH', trừ S.

3. Cho hai đường tròn (O) và (O'). Ta xét đường tròn (w) tiếp xúc đồng thời với cả hai đường tròn đó. Gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến chung của các cặp (O; w) và (O'; w) tại các tiếp điểm. Tìm tập hợp M, khi (w) thay đổi.

Hướng dẫn: M là điểm cùng phương tích đối với (O) và (O'). Tập hợp M là một đường thẳng.

4. Cho đường tròn (O; R) và điểm M không nằm trên đường tròn và khác O. Một đường thẳng (d) đi qua M cắt (O; R) tại hai điểm A, B. Các tiếp tuyến của đường tròn tại A, B cắt nhau tại P. Tìm tập hợp P, khi (d) thay đổi.

Hướng dẫn: Gọi H là giao điểm của OP với AB. Tập hợp H là đường tròn tâm O' đường kính OM.

Nếu $\mathscr{P}_{(M/O)} > 0$ thì ta kí hiệu C, D là giao điểm của (O) và (O'). Rõ ràng điểm P cùng phương tích đối với hai đường tròn (O) và (O'), do đó P thuộc đường thẳng CD, trừ ra dây cung CD (vì mọi điểm thuộc nó không thể kẻ được tiếp tuyến tới đường tròn (O)).

Nếu $\mathscr{P}_{(M/O)} < 0$ thì hai đường tròn đựng nhau. Trường hợp này trục đẳng phương của (O) và (O') là tập hợp điểm P.

5. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R) và điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là giao điểm của AM, BM, CM với đường tròn (O; R). Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\dfrac{MA}{MA'} + \dfrac{MB}{MB'} + \dfrac{MC}{MC'} = 3$.

Hướng dẫn: Từ $$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$$

$$\Rightarrow \quad MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3(R^2 - MO^2),$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

G là trọng tâm tam giác $\Rightarrow \quad 3(MO^2 + MG^2) = 3R^2 - \dfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$

6. Cho đường tròn (O; R), điểm S không nằm trên đường tròn và số $k \neq 0$. Với mỗi điểm M thuộc (O; R) ta dựng điểm M' sao cho M' thuộc đường thẳng SM và $\overline{SM}.\overline{SM'} = k$. Tìm tập hợp M', khi M thay đổi trên đường tròn.

Hướng dẫn: Kí hiệu N là điểm chung thứ hai của SM và (O; R), ta có:

$$\mathscr{P}_{(S/O)} = p \neq 0 = \overline{SM}.\overline{SN}$$

$\Rightarrow \quad k.SM.SN = p.SM.SM' \quad \Rightarrow \quad SM' = \frac{k}{p}SN.$

Trên đường thẳng SO ta lấy điểm O' sao cho $SO' = \frac{k}{p}SO$, thì O' cố định và $O'M' = \left|\frac{k}{p}\right|R$ không đổi. Điều đó chứng tỏ tập M' thuộc đường tròn tâm O', bán kính $R' = \left|\frac{k}{p}\right|R$.

7. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm P và Q. Ta xét AB và CD là các dây cung tương ứng của (O) và (O') và giả thiết rằng giao điểm I của AB và CD thuộc miền trong của cả hai đường tròn. Tìm tập hợp điểm I.

Bài toán cực trị

1. Trong đường tròn (O; R) cho trước điểm P cách tâm O một khoảng d. Xét các tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn O có hai đường chéo vuông góc với nhau tại P.

i) Hãy tìm một tứ giác có diện tích lớn nhất; nhỏ nhất.

ii) Hãy tìm một tứ giác có chu vi nhỏ nhất; lớn nhất.

iii) Hãy giải bài toán đó trong trường hợp hai đường chéo tứ giác hợp với nhau một góc không đổi khác 90°.

Hướng dẫn:

i) Dùng lại kết quả bài 9 (trong phần *tính các yếu tố hình học.*)

ii) Ta đặt $PA = x, \; PB = z, \; PC = y, \; PD = t,$

từ giả thiết ta có $xy = zt = R^2 - d^2$. Xuất phát từ:

$$AB + BC + CD + DA = \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + x^2}$$

và dùng các bất đẳng thức:

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + t^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + (z + t)^2},$$

$\sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{t^2 + x^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + (z + t)^2}$ ta tìm được chu vi bé nhất.

Xuất phát từ:

$$(AB + BC + CD + DA)^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2AB.BC + 2AB.CD + {} + 2AB.DA + 2BC.CD + 2BC.AD + 2CD.DA$$

và dùng thêm hệ thức AC.BD = AD.BC + AB.CD để tìm Max.

2. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d) không có điểm chung với (O; R). Hãy tìm trên (d) điểm M sao cho tiếp tuyến kẻ từ đó đến đường tròn có độ dài ngắn nhất.

3. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d) không có điểm chung với (O; R). Trên (d) ta đặt đoạn AB = a.

Tìm vị trí của AB sao cho $\mathscr{P}_{(A/O)} + \mathscr{P}_{(B/O)}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: $\mathscr{P}_{(A/O)} + \mathscr{P}_{(B/O)} = OA^2 + OB^2 - 2R^2$

$\Rightarrow$ ta tìm min của $OA^2 + OB^2$. Gọi M là trung điểm của AB, ta có:

$$OA^2 + OB^2 = 2OM^2 + \frac{a^2}{8}$$, ta tìm min cua OM.

4. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d) không có điểm chung với (O; R). Xét góc xOy = 90° cắt (d) tại các điểm A và B.

Tìm vị trí của góc sao cho: $\mathscr{P}_{(A/O)} + \mathscr{P}_{(B/O)}$ min.

Hướng dẫn: $\mathscr{P}_{(A/O)} + \mathscr{P}_{(B/O)} = OA^2 + OB^2 - 2R^2$

$\Rightarrow$ ta tìm min của $OA^2 + OB^2$. Hạ OH $\perp$ (d) và đặt h = OH, x là góc nhọn tạo bởi OA và (d). Ta có:

$$OA^2 + OB^2 = \frac{h^2}{\sin^2 x} + \frac{h^2}{\cos^2 x} = \frac{h^2}{\sin^2 x.\cos^2 x} \geq 4h^2.$$

5. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d) tiếp xúc với (O; R). Ta xét góc vuông xOy có hai cạnh cắt (d) tại hai điểm A và B. Tìm vị trí của góc vuông xOy sao cho: $\dfrac{1}{\mathscr{P}_{(A/O)}} + \dfrac{1}{\mathscr{P}_{(B/O)}}$ nhận giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 4.

6. Cho ba đường tròn (O; R), (O'; R') và (O''; R''). Trên đường tròn (O''; R'') ta lấy điểm M. Tìm vị trí của M sao cho: $\mathscr{P}_{(M/O)} + \mathscr{P}_{(M/O')}$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

$$\mathscr{P}_{(M/O)} + \mathscr{P}_{(M/O')} = OM^2 + O'M^2 - (R^2 + R'^2).OM^2 + O'M^2$$

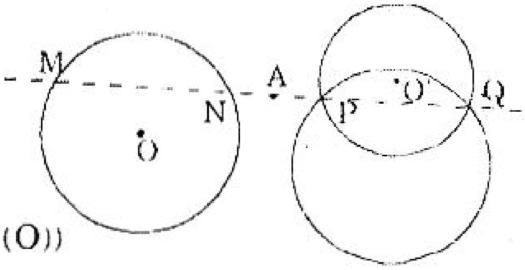
$$= 2MI^2 + \frac{O'O^2}{2} \text{ min} \quad \Leftrightarrow \quad MI \text{ min.}$$

7. Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R') và đường thẳng (d). Trên đường tròn (O'; R') ta lấy điểm M, trên (d) ta lấy điểm N sao cho MN = a (a là số dương cho trước).

Tìm vị trí của M và N sao cho $\mathscr{P}_{(M/O)} + \mathscr{P}_{(N/O)}$ nhỏ nhất.

1. Cho hai đường tròn (O), (O') không đồng tâm và điểm A. Hãy dựng một đường thẳng đi qua A cắt (O) và (O') thành các dây cung có độ dài bằng nhau.

   Hướng dẫn: Giả sử đường thẳng qua A cắt (O) theo dây MN và (O') theo dây PQ sao cho MN = PQ. Hãy dựng đường tròn (O'') bằng (O) và đi qua P, Q và $OO'' \parallel MN \Rightarrow OO'' \perp O'O'' \Rightarrow O'' \in$ đường tròn đường kính OO'.

   Mặt khác A thuộc trục đẳng phương của (O') và (O'')

   $\Rightarrow \mathscr{P}_{(A/O')} = \mathscr{P}_{(A/O'')}$

   $\Rightarrow AO''^2 = R^2 + \mathscr{P}_{(A/O')}$ (R là bán kính của (O))

   Nếu $R^2 + \mathscr{P}_{(A/O')} > 0$ thì $AO'' = \sqrt{R^2 + \mathscr{P}_{(A/O')}}$.

   Vậy O'' là giao của hai cung tròn: cung tròn tâm A, bán kính $\sqrt{R^2 + \mathscr{P}_{(A/O')}}$ và cung tròn đường kính OO'.

2. Cho đường tròn (O; R) và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hãy dựng một đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B sao cho A là trung điểm của BM.

3. Cho góc xSy, đường tròn (O) tiếp xúc với hai cạnh của góc và điểm A không nằm trên (O). Hãy dựng đường tròn (w) đi qua hai điểm A, O và cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q sao cho PQ đi qua S.

   Hướng dẫn: Gọi H là giao của SO và đường thẳng đi qua hai tiếp điểm; (w) là đường tròn đi qua ba điểm O, H, A.

38. PHƯƠNG TÍCH TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỰC CHUẨN

Ví dụ 1. Cho đường tròn (w): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$.

Tính $\mathscr{P}_{(M/w)}$.

Giải

Gọi I là tâm của (w), khi đó I(a; b). Ta có:

$$\mathscr{P}_{(M/w)} = IM^2 - R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2.$$

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn (w_1) và (w_2) có các phương trình tương ứng:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2 \quad \text{và} \quad (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2$$

(tâm của hai đường tròn không trùng nhau). Lập phương trình trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho.

Giải

Theo định nghĩa, trục đẳng phương của (w_1) và (w_2) là tập hợp điểm cùng phương tích đối với cả hai đường tròn đó, vì vậy $M(x_o; y_o)$ thuộc trục đẳng phương $\Leftrightarrow \quad \mathscr{P}_{M/(w_1)} = \mathscr{P}_{M/(w_2)}$

$$\Leftrightarrow \quad (x_o - a_1)^2 + (y_o - b_1)^2 - R_1^2 = (x_o - a_2)^2 + (y_o - b_2)^2 - R_2^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(a_1 - a_2)x_o + 2(b_1 - b_2)y_o + (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2) = 0.$$

Đẳng thức này chứng tỏ trục đẳng phương của hai đường tròn có phương trình:

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2) = 0.$$

39. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho đường tròn (w): $x^2 + y^2 = 4$ và điểm A(2; 2).

i) Chứng minh rằng A nằm ngoài đường tròn.

ii) Tính độ dài tiếp tuyến kẻ từ A đến (w).

iii) Lập phương trình đường thẳng đi qua A và cắt (w) tại hai điểm B và C sao cho B là trung điểm của AC.

ĐS: ii) 2.

iii) Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{và} \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

2. Cho đường tròn (w): $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

i) Giả sử $M(x_o; 0)$ là điểm bất kì thuộc trục Ox.

Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{(M/w)} > 0$.

ii) Lập phương trình đường tròn đường kính wM và lập phương trình trục đẳng phương của (w) và đường tròn đường kính wM.

iii) Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn đó đi qua một điểm cố định, khi M thay đổi trên trục hoành.

ĐS: i) $\mathscr{P}_{(M/w)} = (x_o - 3)^2 + 3 > 0 \ \forall x_o$;

ii) $(x - x_o)(x - 3) + (y - 2)y = 0, \qquad (3 - x_o)x + 2y + 3x_o - 14 = 0$

Điểm cố định mà trục đẳng phương đi qua là $\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$.

3. Cho đường tròn (w): $x^2 + y^2 = 9$ và điểm A(–2; 0).

i) Chứng minh rằng A nằm trong (w).

ii) Đường thẳng (d) đi qua A cắt (w) tại hai điểm B và C. Tìm tọa độ các điểm B, C sao cho $\overline{BA} = 2\overline{AC}$.

Hướng dẫn: Tọa độ của $B(x_1; y_1)$ và $C(x_2; y_2)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 9 \\ x_2^2 + y_2^2 = 9 \\ -2 - x_1 = 2x_2 + 4 \\ -y_1 = 2y_2 \end{cases}$$

4. Cho hai đường tròn (w_1) và (w_2) có các phương trình tương ứng:

$$x^2 + y^2 = 16 \quad \text{và} \quad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Tìm trục đẳng phương của (w_1), (w_2) và xét xem trục đẳng phương của chúng có điểm chung với các đường tròn đó không?

ĐS: Trục đẳng phương: $2x - y - 6 = 0$, (w_1) và trục đẳng phương có hai điểm chung phân biệt; do đó (w_1) và (w_2) cắt nhau.

5. Cho ba điểm $A(-2; 0)$, $B(1; -1)$, $C(0; 4)$. Tìm tâm và bán kính đường tròn (w) sao cho: $\mathscr{P}_{(A/w)} = 1$, $\mathscr{P}_{(B/w)} = 2$ và $\mathscr{P}_{(C/w)} = 3$.

Hướng dẫn: Giả sử đường tròn (w) có phương trình:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (2 + a)^2 + b^2 = R^2 \\ (1 - a)^2 + (1 + b)^2 = R^2 \\ a^2 + (4 - b)^2 = R^2 \end{cases}$

6. Cho đường tròn (W): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ và đường thẳng (d): $y = 2x - 3$.

Tìm tâm của đường tròn (W') có bán kính $R' = 3$ và các đường tròn (W), (W') nhận (d) làm trục đẳng phương.

Hướng dẫn: Giả sử đường tròn (W') có phương trình:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 9$$

Trục đẳng phương của hai đường tròn có phương trình:

$$2(a - 1)x + 2(b + 1)y + 7 - a^2 - b^2 = 0$$

vì đường thẳng này trùng với đường thẳng $2x - y - 3 = 0 \Rightarrow a$ và b là nghiệm của hệ:

$$\frac{a - 1}{1} = \frac{2(b + 1)}{-1} = \frac{7 + a^2 - b^2}{-3}.$$

7. Cho hai điểm $A(2; 2)$, $B(4; 1)$. Tìm tiếp điểm của đường tròn (w) đi qua A, B và tiếp xúc với:

i) trục Ox　　　　　ii) trục Oy.

8. Cho hai điểm A(3; 5), B(5; −3). Đường tròn đi qua A, B cắt trục Ox tại hai điểm P, Q thỏa mãn điều kiện $AB^2 + PQ^2 = 204$. Tìm tọa độ P và Q.

Hướng dẫn: Đường tròn đi qua A, B và thỏa mãn điều kiện bài toán có phương trình:

$$x^2 + y^2 = 34; \qquad x^2 + y^2 - 17x - \frac{17}{4}y + \frac{153}{4} = 0$$

Để tìm tọa độ của P và Q, ta cho các đường tròn đó cắt trục Ox.

9. Cho đường tròn (w): $x^2 + y^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; 0)$ nằm ngoài (w). Đường thẳng (d) đi qua M cắt (w) tại các điểm A và B. Đường thẳng (d') đi qua M cắt (w) tại C và D. Chứng minh rằng khi (d) và (d') thay đổi, giao điểm các dây cung AC và BD nằm trên một đường thẳng cố định.

10. Cho parabol (P): $y = \dfrac{x^2}{4}$ và điểm F(0; 1). Một đường thẳng (d) đi qua F cắt (P) tại hai điểm A, B. Gọi (w) là đường tròn đường kính AB.

i) Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{(O/w)}$ không phụ thuộc vị trí của (d) (O là gốc tọa độ).

ii) Xét đường thẳng (d') có phương trình y = −1, ta kí hiệu A', B' là chân đường vuông góc hạ từ các điểm A, B xuống (d'), (w') là đường tròn đường kính A'B'. Chứng minh rằng trục đẳng phương của (w) và (w') là trục Ox.

Hướng dẫn:

i) Kí hiệu $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là tọa độ của A và B.

Phương trình đường tròn (w) có dạng:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \qquad (*)$$

Phương tích của O đối với (w) là:

$$\mathscr{P}_{(O/w)} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + \frac{x_1^2x_2^2}{16}$$

$$\text{vì} \quad \overrightarrow{FA} \,//\, \overrightarrow{FB} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1 - 1}{y_2 - 1} = \frac{x_1^2 - 4}{x_2^2 - 4}$$

$$\Rightarrow \quad x_1x_2^2 - 4x_1 = x_2x_1^2 - 4x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1x_2 = -4$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{P}_{(O/w)} = -3.$$

ii) Phương trình của (w') có dạng:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y + 1)^2 = 0 \qquad (**)$$

Lấy hiệu của (*) và (**), ta được phương trình trục đẳng phương của (w) và (w').

Chương III

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

40. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH HỌC

Trong mặt phẳng cho một qui tắc f, với một điểm M bằng qui tắc đã cho, ta dựng được một điểm duy nhất M'; khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép biến đổi f và kí hiệu f: M → M'. Điểm M được gọi là tạo ảnh hoặc nghịch ảnh của M'. Nếu theo quy tắc f mọi điểm M của mặt phẳng biến thành điểm M' sao cho với điểm M'_1 và M'_2 khác nhau là ảnh của các điểm M_1 và M_2 theo quy tắc f, thì M_1 và M_2 phải khác nhau, khi đó ta nói f là một phép biến hình trong mặt phẳng.

Cho một hình H và một phép biến đổi f, tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc H trong phép biến đổi đó lập thành một hình H' được gọi là ảnh của H và kí hiệu f: H → H'.

Phép biến đổi f gọi là đồng nhất, nếu ∀M; f: M → M. Phép biến đổi f gọi là 1 – 1, nếu ∀M; f: M → M' và M là một nghịch ảnh duy nhất ứng với M'. Điểm O được gọi là điểm bất động của phép biến đổi f, nếu f: O → O. Cho hai phép biến đổi f và g, nếu với điểm M bất kì f: M → M' và g: M' → M'', thì ta nói phép biến đổi biến M → M'' là tích của f và g và kí hiệu g • f: M → M''. Hai phép biến đổi f và g gọi là bằng nhau, nếu ảnh của mọi điểm M trong các phép biến đổi f và g trùng nhau và kí hiệu f = g. Phép biến đổi f được gọi là có ngược, nếu ∀M; f: M → M', thì tồn tai một phép biến đổi f': M' → M. Điều đó có nghĩa là f • f là phép đồng nhất.

41. CÁC PHÉP DỜI HÌNH VÀ DÙNG CHÚNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Định nghĩa: Phép biến đổi f được gọi là phép dời hình, nếu khoảng cách giữa hai điểm bất kì A, B bằng khoảng cách giữa hai ảnh của chúng trong phép biến đổi đó.

Nếu f: A → A', B → B', thì A'B' = AB.

Trong phần này ta chỉ đề cập đến các phép đối xứng tâm, đối xứng qua một đường thẳng, phép quay, phép tịnh tiến và tích của các phép biến đổi đó. Ta sẽ vận dụng các phép dời hình đã nêu để giải toán.

42. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VỀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Định nghĩa: Cho trước điểm O. Phép biến đổi Z_o: O → O và biến M bất kì khác O thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$, được gọi là phép đối xứng tâm. O là tâm đối xứng. Cho hình H; tập hợp ảnh của H trong phép đối

, xứng Z_o lập thành một hình H' được gọi là hình đối xứng với H qua O. Nếu H' và H trùng nhau, thì ta nói H là hình có tâm đối xứng.

Các tính chất

i) Nếu A', B' là ảnh của A, B trong phép đối xứng Z_o, thì $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

ii) Phép đối xứng Z_o biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng, đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') // (d) hoặc (d') trùng với (d), góc xOy thành góc x'Oy' = xOy và các cạnh của chúng cùng phương, đường tròn (O; R) thành đường tròn (O; R).

iii) Phép đối xứng Z_o có ngược và đó là phép đối xứng Z_o.

43. DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM ĐỂ GIẢI TOÁN

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 1. Cho 3 phép đối xứng Z_A, Z_B, Z_C.

Chứng minh rằng: $Z = Z_C \bullet Z_B \bullet Z_A$ là phép đối xứng tâm.

Giải

Trước hết ta chứng minh rằng Z có điểm bất động. Thật vậy; giả sử O là điểm bất động của Z, khi đó ta có:

$$
\begin{aligned}
&Z_A: O \to O' && \Rightarrow && \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O},\\
&Z_B: O' \to O'' && \Rightarrow && \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{BO''},\\
&Z_C: O'' \to O && \Rightarrow && \overrightarrow{O''C} = \overrightarrow{CO}.
\end{aligned}
$$

Từ các kết quả đó ta suy ra: $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ và đây là đpcm. Bây giờ ta chứng minh Z là phép đối xứng. Giả sử M là điểm bất kì khác O, ta có:

$$
\begin{aligned}
& && Z_A: O \to O', && M \to M'\\
&\Rightarrow \overrightarrow{O'M'} = -\overrightarrow{OM}, && Z_B: O' \to O'', && M' \to M''\\
&\Rightarrow \overrightarrow{O''M''} = -\overrightarrow{O'M'}, && Z_C: O'' \to O, && M'' \to M'''\\
&\Rightarrow \overrightarrow{OM'''} = -\overrightarrow{O''M''}.
\end{aligned}
$$

Từ các kết quả đó ta suy ra: $\overrightarrow{OM'''} = -\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng một đa giác phẳng không thể có đúng hai tâm đối xứng.

Giải

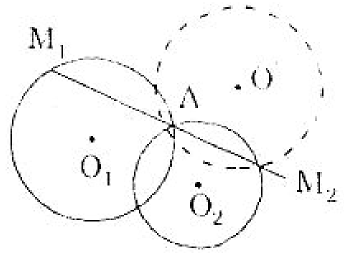
Giả sử đa giác H có hai tâm đối xứng phân biệt là O và O'. Ta xét phép biến đổi $Z = Z_O \bullet Z_{O'} \bullet Z_O$ theo ví dụ 1, Z là phép đối xứng biến H thành H. Kí hiệu O_1 là tâm của phép đối xứng Z, ta có $\overrightarrow{O'O_1} = 2\overrightarrow{O'O}$. Điều đó trái với giả thiết.

Dựng hình

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn O_1 và O_2 cắt nhau tại điểm A. Hãy dựng một đường thẳng (d) qua A và cắt cả hai đường tròn thành hai dây bằng nhau.

Giải

Giả sử (d) cắt O_1 tại M_1 và cắt O_2 tại M_2 sao cho $AM_1 = AM_2$, khi đó phép đối xứng Z_A: $M_1 \to M_2$, thì biến $O_1 \to O'$ đi qua M_2 và M_2 là giao điểm của O' và O_2.



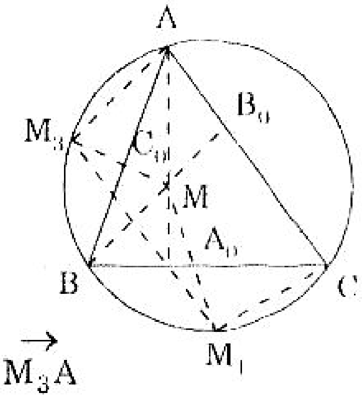
- *Cách dựng:* Dựng ảnh O' của O_1 trong phép đối xứng Z_A. Gọi M_2 là giao điểm của O' và O_2. Dựng đường thẳng đi qua AM_2. Đó là đường thẳng phải dựng.
- *Biện luận:* Bài toán có nghiệm khi O' và O_2 có điểm chung và vô nghiệm khi chúng không có điểm chung. Nếu O' và O_2 tiếp xúc trong tại A thì bài toán vô nghiệm. Nếu O' và O_2 có hai điểm chung phân biệt bài toán có một nghiệm. Nếu hai đường tròn trùng nhau, bài toán có vô số nghiệm.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho ảnh của M trong phép đối xứng qua trung điểm các cạnh tam giác nằm trên đường tròn ngoại tiếp.

Giải

Kí hiệu A_0, B_0, C_0 là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. M_1, M_2, M_3 là ảnh của M trong các phép đối xứng qua 3 điểm tương ứng và chúng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Rõ ràng:



$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M_1C}, \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M_3A} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M_1C} = \overrightarrow{M_3A}$$

$\Rightarrow$ tứ giác M_1CAM_3 là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $MB \perp AC$.

Tương tự: $MC \perp AB$. M là trực tâm tam giác.

- *Biện luận:* Nếu tam giác ABC nhọn, thì tập M là một điểm. Nếu tam giác không nhọn, thì tập M rỗng.

Phép đối xứng tâm trong hệ trực chuẩn

Ví dụ 5. Trong hệ tọa độ xOy cho điểm $A(x_0; y_0)$. Lập công thức của phép biến đổi Z_A.

Giải

Giả sử $M(x; y)$ là điểm bất kì, $M'(x'; y')$ là ảnh của M trong phép biến đổi Z_A. Theo định nghĩa ta có:

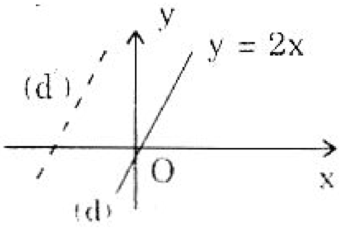
$$\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow x' - x_o = x_o - x \quad \text{và} \quad y' - y_o = y_o - y$$

$$\Leftrightarrow x' = 2x_o - x \quad \text{và} \quad y' = 2y_o - y.$$

Ví dụ 6. Tìm ảnh của đường thẳng (d): $y = 2x$ trong phép đối xứng tâm $A(1; -1)$.

Giải

Nếu (d') là ảnh của (d) trong phép đối xứng Z_A, thì (d') // (d) và phương trình của (d') có dạng: $y = 2x + m$. Gọi O' là ảnh của O(0; 0), khi đó: O'(2; -2). Vì (d) đi qua O, nên (d') đi qua O' và do đó $m = -6$.



Phương trình của (d') có dạng: $y = 2x - 6$.

44. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho 3 phép đối xứng Z_A, Z_B, Z_C (A, B, C là 3 điểm phân biệt).

Chứng minh rằng phép biến đổi $Z = Z_C \bullet Z_B \bullet Z_A \bullet Z_C \bullet Z_B \bullet Z_A$ là phép đồng nhất.

Hướng dẫn: Ta chứng tỏ rằng $\forall M$; phép biến đổi $Z: M \rightarrow M$.

Thật vậy: $Z_A: M \rightarrow M_1 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$;

$Z_B: M_1 \rightarrow M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{BM_2}$;

$Z_C: M_2 \rightarrow M_3 \Rightarrow \overrightarrow{M_2C} = \overrightarrow{CM_3}$;

$Z_A: M_3 \rightarrow M_4 \Rightarrow \overrightarrow{M_3A} = \overrightarrow{AM_4}$;

$Z_B: M_4 \rightarrow M_5 \Rightarrow \overrightarrow{M_4B} = \overrightarrow{BM_5}$;

$Z_C: M_5 \rightarrow M_6 \Rightarrow \overrightarrow{M_5C} = \overrightarrow{CM_6}$.

Xét tổng: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM_4} + \overrightarrow{M_4B} + \overrightarrow{BM_2} + \overrightarrow{M_2C} + \overrightarrow{CM_6} =$

$= \overrightarrow{M_3A} + \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{BM_5} + \overrightarrow{M_5C} + \overrightarrow{CM_3} = \overrightarrow{M_3M_3} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_6} = \vec{0}$.

2. Chứng minh rằng tích của một số lẻ các phép đối xứng tâm là một phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn: Dùng phương pháp quy nạp và xem lại ví dụ 1.

3. Cho đoạn AC và B là trung điểm của AC. Chứng minh rằng:

$$Z_C \bullet Z_B \bullet Z_A = Z_B.$$

Hướng dẫn: Đặt $Z = Z_C \bullet Z_B \bullet Z_A$; theo kết quả trong ví dụ 1, Z là phép đối xứng tâm và tâm đối xứng đó được xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Vì B là trung điểm của AC, nên:

$\overrightarrow{BO} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$ hay $Z = Z_B$.

4. Cho hai điểm phân biệt A và B. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B: Z_B: A → A'. Chứng minh rằng: $Z_{A'} \bullet Z_B \bullet Z_A \bullet = Z_B$.

Hướng dẫn: Xem cách giải ở ví dụ 1.

5. Cho hình bình hành ABCD và hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$ nội tiếp trong hình bình hành ABCD sao cho $A_1 \in AB$, $B_1 \in BC$ $C_1 \in CD$, $D_1 \in DA$. Chứng minh rằng giao điểm các đường chéo của hai hình bình hành đó trùng nhau.

Hướng dẫn: Gọi O là giao điểm các đường chéo của hình bình hành ABCD. Phép đối xứng Z_O: $A_1 \to A'$, $B_1 \to B'$, khi đó: $A' \in CD$, $B' \in DA$ và $A'B' \mathbin{/\!/\!=} AB$. Mặt khác $C_1D_1 \mathbin{/\!/\!=} AB$, do đó: $C_1D_1 \mathbin{/\!/\!=} A'B'$. Do $A'C_1$ và $B'D_1$ không song song, nên: $C_1D_1 \equiv A'B'$.

6. Đường tròn O cắt các cạnh BC, CA, AB của ΔABC tương ứng tại các điểm A_1 và A_2, B_1 và B_2, C_1 và C_2. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng đi qua A_1, B_1, C_1 tương ứng vuông góc với các cạnh tam giác chứa các điểm đó đồng quy thì các đường thẳng đi qua A_2, B_2, C_2 vuông góc với các cạnh tam giác chứa các điểm đó cũng đồng quy

Hướng dẫn: Kí hiệu x là đường thẳng qua A_1 và $x \perp BC$, y là đường thẳng qua B_1 và $y \perp AC$, z là đường thẳng qua C_1 và $z \perp AB$.

Rõ ràng Z_O: x → x' đi qua A_2 và $x' \perp BC$; y → y' đi qua B_2 và $y' \perp AC$; z → z' đi qua C_2 và $z' \perp AB$. Ta kí hiệu S là điểm chung của 3 đường thẳng x, y, z: S' là ảnh của S trong phép đối xứng Z_O, khi đó S' thuộc đồng thời 3 đường thẳng x', y', z'.

7. Cho 4 điểm A, B, C, D theo thứ tự nằm trên một đường thẳng và AB = CD. Chứng minh rằng $XA + XD \geq XB + XC$ đúng với mọi điểm X.

Hướng dẫn: Gọi O là trung điểm của AD, phép đối xứng: Z_O: X → X'; do vậy: $XA = X'D$, $XB = X'C$

$\Rightarrow XA + XD = XD + X'D \geq XC + X'C = XC + XB.$

8. Chứng minh rằng nếu một lục giác lồi có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau, thì nó có một tâm đối xứng.

9. Chứng minh rằng nếu một đa giác có tâm đối xứng, thì đa giác đó có số chẵn cạnh.

Dựng hình

1. Cho ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$. Hãy dựng tâm của phép đối xứng

$$Z = Z_{A5} \bullet Z_{A4} \bullet Z_{A3} \bullet Z_{A2} \bullet Z_{A1}.$$

Hướng dẫn: Xem ví dụ 1, tâm của phép biến đổi Z là giao điểm của hai tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ngũ giác tại A_1 và A_5.

2. Cho hai điểm phân biệt A, B. Hãy dựng tâm của phép đối xứng

$$Z = Z_B \bullet Z_A \bullet Z_B.$$

Hướng dẫn: Xem ví dụ 1.

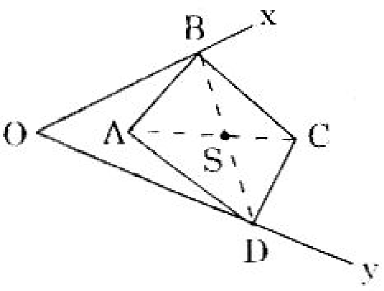
3. Dựng tam giác ABC, biết 3 trung điểm của 3 cạnh tam giác.

4. Cho góc xOy và điểm M nằm trong góc đó. Hãy dựng đường thẳng d đi qua M và cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho M là trung điểm của AB.

Hướng dẫn: Nếu M là trung điểm của AB và O' là điểm đối xứng của O qua M, thì tứ giác OAO'B là hình bình hành.

5. Cho góc xOy và hai điểm A, C nằm trong góc đó. Hãy dựng điểm B ∈ Ox và D ∈ Oy sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

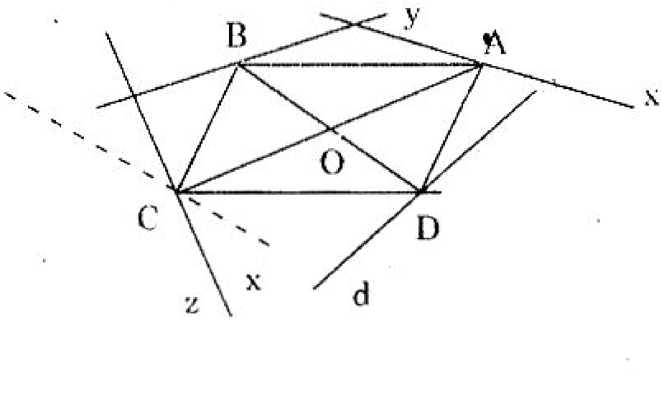
Hướng dẫn: Gọi S là trung điểm của AC và nếu ABCD là hình bình hành thì Z_S: B → D do đó: Ox → O'x'. Điều đó chứng tỏ D là giao điểm của Oy và O'x'.



6. Cho 4 đường thẳng x, y, z, d không có hai đường thẳng nào song song và điểm O không thuộc các đường thẳng đó. Hãy dựng hình bình hành có 4 đỉnh nằm trên 4 đường thẳng đã cho và nhận O là giao điểm các đường chéo.

Hướng dẫn: Giả sử ABCD là hình bình hành đã dựng, trong đó:

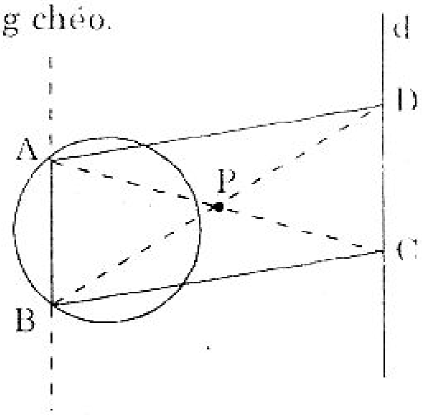
A ∈ x, B ∈ y, C ∈ z, D ∈ d, nhận O là giao điểm các đường chéo. Phép đối xứng Z_O: A → C ⇒ x → x' chứa C và C là giao điểm của x' và z.



Tương tự Z_0: B → D ⇒ y → y' chứa D và D là giao điểm của y' và d. Theo giả thiết x' cắt z và y' cắt d, nên bài toán luôn có nghiệm duy nhất.

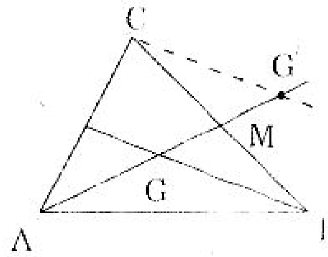
7. Cho đường tròn O, đường thẳng (d) không có điểm chung với O và điểm P. Hãy dựng hình bình hành sao cho hai đỉnh liên tiếp thuộc O, hai đỉnh còn lại thuộc (d) và nhận P là giao điểm các đường chéo.

Hướng dẫn: Giả sử ABCD là hình bình hành đã dựng, trong đó A, B thuộc O; C, D thuộc (d) và P làm tâm đối xứng. Rõ ràng phép đối xứng Z_P: C → A, D → B và do đó (d) → (d') chứa hai điểm A và B.



8. Dựng tam giác ABC, biết các trung tuyến m_a, m_b và $C = \alpha$.

Hướng dẫn: Giả sử ABC là tam giác thỏa mãn điều kiện bài toán. Kí hiệu $AM = m_a$, C thuộc cung chứa góc α dựng trên dây AM. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. G' là điểm đối xứng của G qua M, khi đó G'C là ảnh của GB trong phép đối xứng Z_M, nên $G'C = \frac{2}{3}m_b$ và C thuộc cung tròn tâm G' bán kính $r = \frac{2}{3}m_b$. C là giao của hai cung tròn.

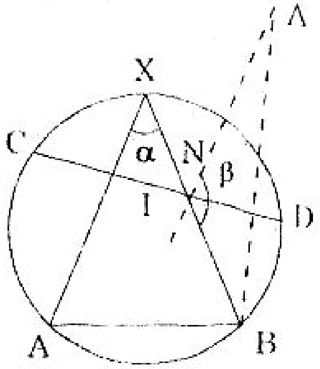


9. Cho đường tròn O và hai dây cung AB, CD không có điểm chung. Trên dây CD ta lấy điểm I, hãy dựng điểm X trên đường tròn O sao cho các dây XA và XB cắt dây CD thành một đoạn MN nhận I làm trung điểm.

Hướng dẫn:

Nếu XA, XB cắt dây CD thì X thuộc cung CD và góc AXB xác định, đặt $\widehat{AXB} = \alpha$.

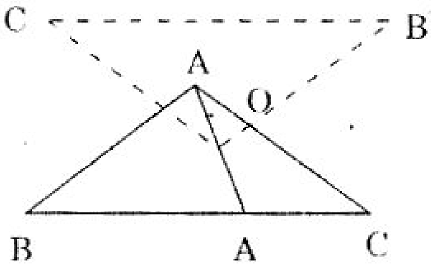
Phép đối xứng Z_I: M → N do đó biến AX → A'X' đi qua N và A'X' // AX ⇒ $A'NB = 180^\circ - \alpha = \beta$ ⇒ N là giao điểm của CD và cung chứa góc β dựng trên đoạn A'B; X là giao điểm của BN và đường tròn O.



10. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác đó. Kí hiệu A'B'C' là ảnh của ABC trong phép đối xứng Z_0 và T là phần chung của hai miền tam giác ABC và A'B'C'.

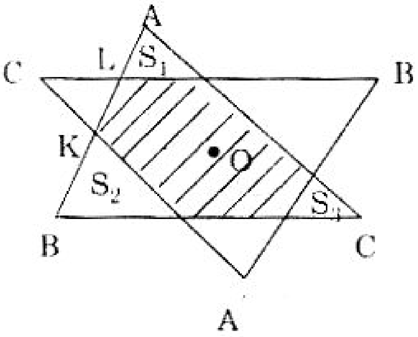
Hãy tìm vị trí của O sao cho diện tích của T lớn nhất.

Hướng dẫn: T là một đa giác có số chẵn cạnh và tối đa bằng 6.



Trường hợp T là hình bình hành. Giả sử A' nằm trong tam giác ABC, kéo dài AA' cắt BC tại M và dựng hình bình hành AEMF (E ∈ AB, F ∈ AC), từ bất đẳng thức:

$$dtT \leq dt\ AEMF \leq \frac{1}{2} dt\ ABC.$$



Dấu bằng trong bất đẳng thức khi A' trùng với trung điểm của BC và do đó O là trung điểm của trung tuyến kẻ từ A.

Trường hợp A', B', C' nằm ngoài tam giác ABC. T có dạng lục giác mà các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Trường hợp này dt T lớn nhất ⇔ $S_1 + S_2 + S_3$ nhỏ nhất (xem hình trên). Kí hiệu S là diện tích tam giác ABC, ta có:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{AL}{AB}\right)^2, \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{BK}{AB}\right)^2, \quad \frac{S_3}{S} = \left(\frac{LK}{AB}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad S_1 + S_2 + S_3 = \left\{\left(\frac{AL}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BK}{AB}\right)^2 + \left(\frac{LK}{AB}\right)^2\right\} S$$

và dùng bất đẳng thức Bunhiacốpski. Đẳng thức xảy ra khi O là trọng tâm tam giác ABC và so sánh các kết quả của hai trường hợp đã xét.

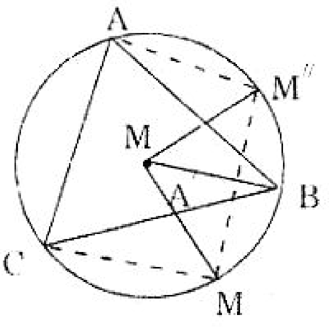
11. Cho tam giác ABC. Hãy tìm một đa giác lồi có tâm đối xứng chứa bên trong nó tam giác ABC và có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 10.

Tìm tập hợp điểm

1. Cho tam giác ABC và A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tìm tập hợp điểm M trong tam giác đó sao cho ảnh của M trong các phép đối xứng $Z_{A'}$, $Z_{B'}$, $Z_{C'}$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn: Phép đối xứng



$Z_{A'}$: $M \to M' \in (O)$, $B \to C$

$\Rightarrow$ $MB \to M'C$ và $MB \mathbin{//=} M'C$.

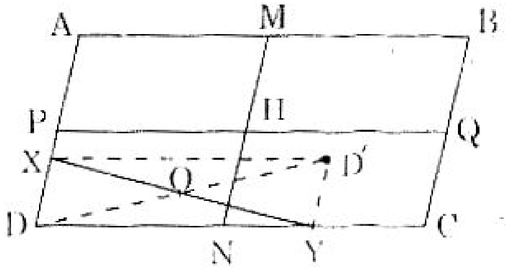
$Z_{C'}$: $M \to M'' \in (O)$, $B \to A$

$\Rightarrow$ $MB \to M''A$ và $MB \mathbin{//=} M''A$.

Tứ giác ACM'M" là hình chữ nhật ⇒ $BM \perp AC$ hay M thuộc đường cao của tam giác ABC hạ từ B. Tương tự M cũng là đường cao của tam giác hạ từ C. Tập M là một điểm và là trực tâm của tam giác ABC, nếu ABC có 3 góc nhọn. Trường hợp ABC là tam giác không nhọn, thì tập M là rỗng.

2. Cho hình bình hành ABCD và các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AD, BC. Giả sử O là điểm cố định nằm trong hình bình hành và không thuộc MN và PQ. Tìm tập hợp các điểm X và Y thuộc các cạnh của hình bình hành sao cho O là trung điểm của đoạn XY.

Hướng dẫn: Kí hiệu H là giao điểm của MN và PQ. Ta coi O là điểm trong của hình bình hành DNHP.



Nếu X và Y là các điểm nằm trên các cạnh của hình bình hành ABCD sao cho O là trung điểm của XY, thì phép đối xứng Z_O: X → Y, D → D' và tứ giác DXYD' là hình bình hành. Vì O thuộc hình bình hành DNHP, nên X và Y phải thuộc các cạnh DA và DC. Tập hợp X và Y là một điểm thuộc DA và BC.

3. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Giả sử O là điểm cố định nằm trong tam giác MNP. Tìm tập hợp các điểm X và Y nằm trên các cạnh tam giác ABC sao cho O là trung điểm các đoạn thẳng XY.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 2.

4. Cho tập hợp điểm X gồm n điểm và điểm O. Ta kí hiệu X' là tập con của X gồm n − 1 điểm nhận O là tâm đối xứng, nghĩa là phép đối xứng Z_O biến X thành X'. Tìm tập hợp điểm O có tính chất như vậy.

ĐS: Tập hợp O có tính chất đã nêu là rỗng hoặc gồm nhiều nhất là 3 điểm.

Phép đối xứng trong hệ trực chuẩn

1. Tìm ảnh của $\vec{U}(2; 5)$ trong phép đối xứng Z_M, M(−1; 1).

ĐS: (−2; −5). Phép biến đổi Z_M: $\vec{U} \to -\vec{U}$

2. Tìm ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ trong phép đối xứng Z_M, M(1; −2).

ĐS: $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$. Tâm của đường tròn đã cho là (0; 0). Hãy tìm tâm của đường tròn đối xứng với đường tròn đó qua M.

3. Cho đường thẳng $y = kx$. Tìm ảnh của đường thẳng đó trong phép đối xứng Z_M, M(a; b).

ĐS: $y = kx + y_0$, trong đó: $y_0 = 2(b - ka)$.

4. Cho parabol $y = x^2$. Tìm ảnh của parabol trong phép đối xứng Z_O, $O(0; 0)$.

ĐS: $y = -x^2$.

5. Tìm ảnh của parabol $y = 2x^2$ trong phép đối xứng Z_M, $M(0; -1)$.

ĐS: $y = -2(x^2 + 1)$.

6. Cho hai điểm $A(-4; 0)$, $B(0; 12)$. Tìm phép đối xứng tám biến A thành B.

ĐS: Tâm của phép đối xứng $(-2; 6)$.

7. Cho hai đường thẳng: $y = x + 5$ và $y = x - 11$.

Tìm phép đối xứng tâm biến đường thẳng thứ nhất thành đường thẳng thứ hai.

ĐS: Tâm của phép đối xứng là tập hợp điểm thuộc đường thẳng:

$$y = x - 3.$$

8. Cho hai đường tròn (w_1): $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$

$$\text{và } (w_2): (x + 3)^2 + y^2 = 16.$$

Tìm phép đối xứng tâm biến (w_1) thành (w_2).

ĐS: Tâm của phép đối xứng $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

45. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VỀ PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa

Cho đường thẳng (d), với mỗi điểm $M \notin (d)$ ta dựng điểm M' sao cho (d) là đường trung trực của đoạn MM', nếu $M \in (d)$, thì M' là điểm M, khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép đối xứng qua (d). (d) được gọi là trục đối xứng và ký hiệu $S_d: M \to M'$.

Cho hình H tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc H lập thành hình H' được gọi là hình đối xứng của H. Nếu H và H' trùng nhau, thì ta nói H là hình có trục đối xứng.

Các tính chất

i) Nếu A', B' là ảnh của A, B trong phép đối xứng S_d thì $A'B' = AB$.

ii) Phép đối xứng S_d biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng. Đường thẳng x thành đường thẳng x'. Góc xOy thành góc x'O'y' và hai góc bằng nhau. Đường tròn (O; R) thành đường tròn (O'; R).

iii) Trục đối xứng là đường thẳng bất động.

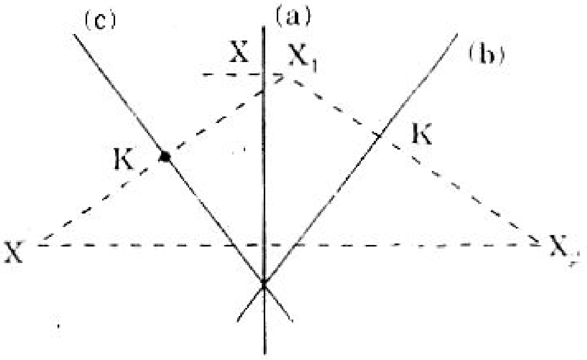
iv) Phép đối xứng S_d có ngược và phép biến đổi đó chính là S_d.

46. DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng (a), (b). Kí hiệu (c) là ảnh của (b) trong phép đối xứng S_a. Chứng minh rằng: $S_a \bullet S_b \bullet S_a = S_c$.

Giải



Ta đặt $S = S_a \bullet S_b \bullet S_a$ và cần chứng minh (c) là đường thẳng bất động của S. Thật vậy với $M \in (c)$,

S_a: $M \to M' \in (b)$,

S_b: $M' \to M' \in (b)$,

S_a: $M' \to M \in (c)$.

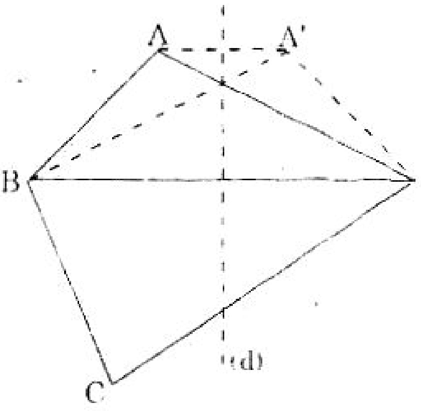
Giả sử X là điểm bất kì không thuộc (c), S_a: $X \to X_1$ có tính chất $XX_1 \perp (a)$ tại H và $HX = HX_1$, S_b: $X_1 \to X_2$ có tính chất $X_1X_2 \perp (b)$ tại K và $KX_1 = KX_2$, S_a: $X_2 \to X'$ có tính chất $X_2X' \perp (a)$ tại I và $IX_2 = IX'$.

Ta xem S_a: $X_1 \to X$,

$X_2 \to X' \Rightarrow X_1X_2 \to XX'$ và do đó trung điểm K biến thành trung điểm K' của XX' và $K' \in (c)$. Điều đó chứng tỏ nếu $X_1X_2 \perp (b)$ tại K, thì $XX' \perp (c)$ tại K' hay S_c: $X \to X'$.

Ví dụ 2. Kí hiệu S là diện tích của một tứ giác lồi ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d. Chứng minh rằng: $2S \leq ac + bd$.

Giải



Ta dựng đường trung trực (d) của BD và gọi A' là ảnh của A trong phép đối xứng S_d. Rõ ràng tứ giác AA'DB là hình thang cân

$\Rightarrow$ $AD = A'B$, $AB = A'D$,

$S_{ABD} = S_{A'BD}$

$\Rightarrow$ $S_{ABCD} = S_{A'BDC}$

Mặt khác, ta có: $2S_{A'BCD} \leq ac + bd$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Dựng hình

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d) và hai đường tròn (O), (O') nằm về hai phía với (d) ((O), (O') không tiếp xúc với (d)). Hãy dựng hình vuông sao cho một đường chéo của nó nằm trên (d), hai đỉnh còn lại nằm trên (O) và (O').

Giải

Giả sử ABCD là hình vuông đã dựng có BD thuộc (d) và các điểm A thuộc (O), điểm C thuộc (O'). Rõ ràng phép biến đổi S_d biến A thành C và do đó biến (O) chứa A thành (O") chứa C. Mặt khác C lại thuộc (O'), nên C là điểm chung của hai đường tròn (O") và (O'). Từ đó ta đi đến cách dựng sau:

Dựng ảnh (O") của (O) trong phép biến đổi S_d. Gọi C là giao điểm của (O") và (O'). Dựng ảnh A của C trong phép biến đổi S_d. Gọi H là giao điểm của (d) và AC, dựng đường tròn tâm H bán kính HA giao điểm của đường tròn đó và đường thẳng (d) là các đỉnh B, C cần dựng.

Thật vậy theo cách dựng A phải thuộc (O), vì (O) cũng là ảnh của (O") trong phép biến đổi S_d. Tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, có độ dài bằng nhau và vuông góc với nhau, nên ABCD là hình vuông.

Bài toán có vô số hoặc có hai hoặc một hoặc vô nghiệm tùy thuộc vào hai đường tròn (O') và (O"). Có vô số hoặc hai hoặc một hoặc không có điểm chung nào.

Ví dụ 2. Cho đường thẳng xx' và hai điểm A, B không thuộc xx' và nằm về một phía với đường thẳng đó.

Hãy dựng điểm $O \in xx'$ sao cho góc $\widehat{AOx} = 2\widehat{BOx}$.

Giải

Giả sử O là điểm đã dựng. Gọi Oy là tia đối của tia OA, khi đó góc $\widehat{x'Oy} = \widehat{AOx} \Rightarrow \widehat{x'Oy} = 2\widehat{BOx'}$. Gọi B' là ảnh của B trong phép biến đổi $S_{xx'}$, rõ ràng đường tròn tâm B' tiếp xúc với xx', thì nó cũng tiếp xúc với tia Oy (tia ÔB' là tia phân giác của góc $\widehat{x'Oy}$) và do đó O nằm trên tiếp tuyến của đường tròn tâm B' kẻ từ A. Từ đó ta có cách dựng như sau:

Dựng B' là ảnh của B trong phép biến đổi S_{xx}. Dựng đường tròn tâm B' tiếp xúc với xx'. Dựng tiếp tuyến của đường tròn đó kẻ từ A. Giao điểm của tiếp tuyến và xx' là điểm O phải dựng.

Bài toán luôn có một nghiệm duy nhất.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ. Tìm tập hợp điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho ảnh của nó trong các phép biến đổi S_{AB}, S_{BC}, S_{CA} cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải

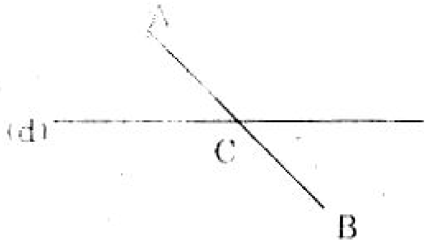
Từ giả thiết ta suy ra tập M là điểm chung của 3 đường tròn (O'), (O"), (O'') lần lượt là ảnh của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trong các phép biến đổi đã cho và M chính là trực tâm tam giác ABC. Nếu tam giác đã cho có góc tù hoặc vuông thì tập M là rỗng. Nếu tam giác ABC nhọn thì tập M là một điểm.

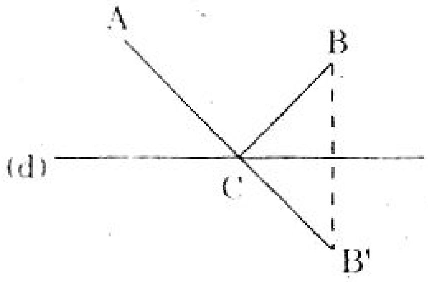
Bài toán cực trị

Ví dụ 1. Cho đường thẳng [illegible] A, B không nằm trên (d). Hãy tìm trên (d) điểm C sao cho:

i) CA + CB nhỏ nhất. ii) | CA − CB | lớn nhất.

Giải





Ta xét các trường hợp sau:

i) A, B nằm khác phía với (d). Rõ ràng giao điểm C của AB và (d) là điểm phải tìm, vì nếu C' khác C và thuộc (d), thì:

$$C'A + C'B > CA + CB = AB \quad \text{(AB là độ dài không đổi).}$$

ii) A, B nằm cùng phía với (d), ta gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d) và khi đó A', B là hai điểm khác phía với (d). Theo kết quả vừa xét ở trên giao điểm C của A'B và (d) là điểm phải tìm. Thật vậy nếu C' khác C và thuộc (d), thì:

$$C'A + C'B = C'A' + C'B > CA' + CB = A'B$$

(A'B là độ dài không đổi).

iii) A, B nằm cùng phía với (d) và cắt (d) tại C, thì chính C là điểm phải tìm sao cho |CA − CB| lớn nhất. Thật vậy, nếu C' khác C và thuộc (d), thì |C'A − C'B| < AB = |CA − CB| (AB là độ dài không đổi). Nếu A, B khác phía với (d), ta gọi A' là điểm đối xứng của A qua (d) và nếu A'B cắt (d) tại C, thì C là điểm phải tìm.

Phép đối xứng qua một đường thẳng trong hệ trực chuẩn

Ví dụ 1. Cho điểm $M(x_0; y_0)$. Tìm ảnh của M trong phép đối xứng qua:

i) Các trục tọa độ. ii) Đường thẳng x = y.

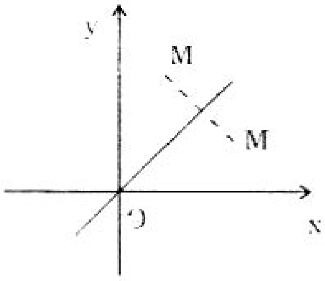
Giải

i) Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M trong phép đối xứng qua Ox, khi đó $MM' \perp Ox$ tại trung điểm $H(x_0; 0)$ của MM'

$\Rightarrow \quad x' + x_0 = 2x_0,\ y' + y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = x_0,\quad y' = -y_0.$

Tương tự; nếu ta kí hiệu $M_1(x_1; y_1)$ là ảnh của M trong phép đối xứng qua Oy, thì: $x_1 = -x_0$, $y_1 = y_0$.

ii) Ta kí hiệu $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x_0; y_0)$ trong phép đối xứng qua đường thẳng y = x. khi đó MM' ⊥ đường thẳng y = x tại trung điểm H. Ta tìm tọa độ của H. Phương trình đường thẳng MM' có dạng y = − x + q. vì đường thẳng đó đi qua M, nên $q = y_0 + x_0$ và do đó $y = -x + y_0 + x_0$.



Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = x \\ y = -x + y_0 + x_0 \end{cases}$

Giải hệ đó ta được: $2x = x_0 + y_0$, $2y = x_0 + y_0$

$\Rightarrow$ tọa độ M' được xác định bởi hệ phương trình: $\begin{cases} x_0 + x' = x_0 + y_0 \\ y_0 + y' = x_0 + y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow x' = y_0,\quad y' = x_0 \quad$ hay $\quad M'(y_0; x_0)$.

47. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Chứng minh các tính chất hình học

1. Cho phép đối xứng Z_A và phép đối xứng S_d.

Chứng minh rằng: $A \in (d) \quad \Leftrightarrow \quad S_d \bullet Z_A = Z_A \bullet S_d$.

Hướng dẫn: Giả sử A ∈ (d) và M là điểm bất kì, khi đó:

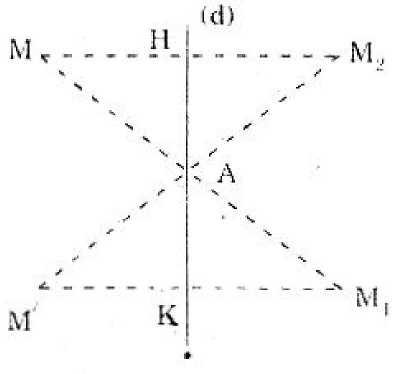
$Z_A: M \to M_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$; $\quad S_d: M_1 \to M'$

$\Rightarrow \quad M_1M' \perp (d)$ tại trung điểm K

và $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{MM'}$; $\quad S_d: M \to M_2$

$\Rightarrow \quad MM_2 \perp (d)$ tại điểm H và

$2\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MM_2}$; $\quad Z_A: M_2 \to M''$

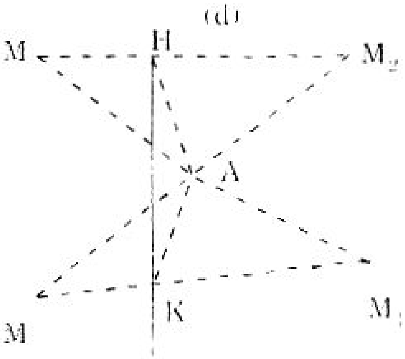


và AH là đường trung bình của tam giác MM_2M'' và MM_2M_1, nên $\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{MM''}$.

AK là đường trung bình của tam giác MM_1M' và $M_2M'M_1$, nên

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_2M_1}.$$

Giả sử $S_d \bullet Z_A = Z_A \bullet S_d$, khi đó với M bất kì ta có:



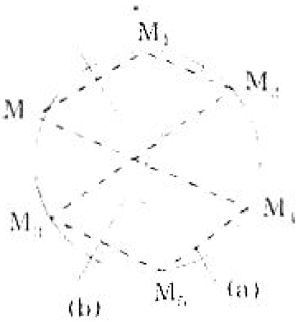
Z_A: M → M_1 và S_d: M_1 → M'; S_d: M → M_2 và Z_A: M_2 → M'. Gọi H là giao điểm của (d) và MM_2, K là giao điểm của (d) và M_1M', ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{AK}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AK} \quad \Rightarrow \quad A \in HK.$$

2. Cho hai đường thẳng (a) và (b) cắt nhau.

Chứng minh rằng nếu $S_a \bullet S_b \bullet S_a = S_b \bullet S_a \bullet S_b$, thì góc nhọn tạo bởi (a), (b) bằng 60°.



Hướng dẫn: Gọi O là giao điểm của (a), (b) và giả sử M là điểm bất kì, ta có:

S_a: M → M_1, S_b: M_1 → M_2, S_a: M_2 → M_3

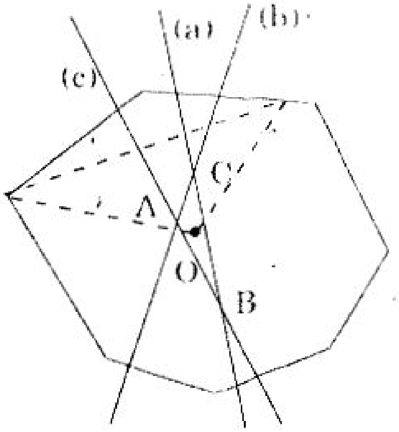
⇒ $MM_1 \perp (a)$, $M_1M_2 \perp (b)$, $M_2M_3 \perp (a)$;

S_b: M → M_4, S_a: M_4 → M_5, S_b: M_5 → M_6

⇒ $MM_4 \perp (b)$, $M_4M_5 \perp (a)$, $M_5M_6 \perp (b)$.

Rõ ràng tập hợp các điểm M, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 cùng nằm trên một đường tròn tâm O. Ta có: $MM_1 // M_2M_3 // M_4M_5$; $M_1M_2 // MM_4 // M_5M_6$. Từ các cặp cung bị chắn bởi các dây song bằng nhau, ta suy ra điều cần chứng minh.

3. Chứng minh rằng nếu một đa giác có 3 trục đối xứng, thì 3 trục đó đồng quy.



Hướng dẫn: Kí hiệu (a), (b), (c) là các trục đối xứng của một đa giác (H) và giả sử chúng cắt nhau tại 3 điểm phân biệt A, B, C. Ta lấy một điểm O nằm trong tam giác ABC và giả sử M là đỉnh của (H) cách O xa nhất. Trong 3 đường thẳng (a), (b), (c) có một đường thẳng sao cho O và M nằm về một phía đối với đường thẳng đó giả sử đường thẳng (a) có tính chất như vậy. Vì (a) là trục đối xứng của (H), nên S_a: M → M' ∈ (H) và OM' > OM !

4. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Giả sử AD và BC cắt nhau tại S. Chứng minh rằng giao điểm thứ hai khác S của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAC và SBD nằm trên trục đối xứng của hình thang.

Hướng dẫn: Gọi x là trục đối xứng của hình thang

S_x: S → S, A → B và C → D ⇒ ΔSAC → ΔSBD và đường tròn ngoại tiếp ΔSAC → đường tròn ngoại tiếp ΔSBD, vì vậy x chứa dây cung chung của hai đường tròn.

5. Cho tam giác ABC và các đường trung tuyến AM; phân giác AD. Phép đối xứng qua AD biến AM thành một đường thẳng x (x được gọi là đường đối trung). Đường thẳng x cắt BC tại K. Chứng minh rằng: $\frac{BK}{CK} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Hướng dẫn: Kí hiệu B_1 và C_1 là ảnh của B, C trong phép đối xứng qua AD, khi đó ảnh của M là trung điểm của B_1C_1 và do đó AK đi qua điểm này. Gọi P là điểm đối xứng của A qua trung điểm của B_1C_1, $Q \in AP$ sao cho $CQ \parallel B_1P$.

Ta có: $\frac{CQ}{PB_1} = \frac{CQ}{AC_1} = \frac{CQ}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{CQ}{AB} = \frac{AC^2}{AB^2}$.

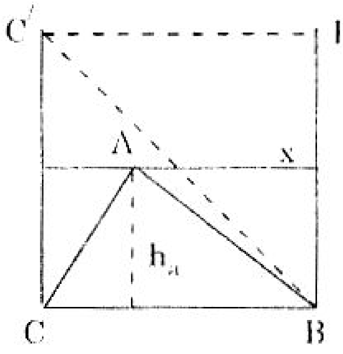
Mặt khác: $\Delta ABK \backsim \Delta QKC \Rightarrow \frac{CQ}{AB} = \frac{CK}{BK}$.

6. Chứng minh rằng nếu một đa giác có đúng hai trục đối xứng, thì đa giác đó có tâm đối xứng.

Hướng dẫn: Nếu đa giác có đúng hai trục đối xứng, thì hai trục đó vuông góc với nhau (theo kết quả của ví dụ 1). Nếu hai trục đối xứng của một đa giác vuông góc thì giao điểm của hai trục đó là tâm đối xứng của đa giác.

7. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$h_a \le \sqrt{p(p-a)}$, trong đó: $p = \frac{a+b+c}{2}$



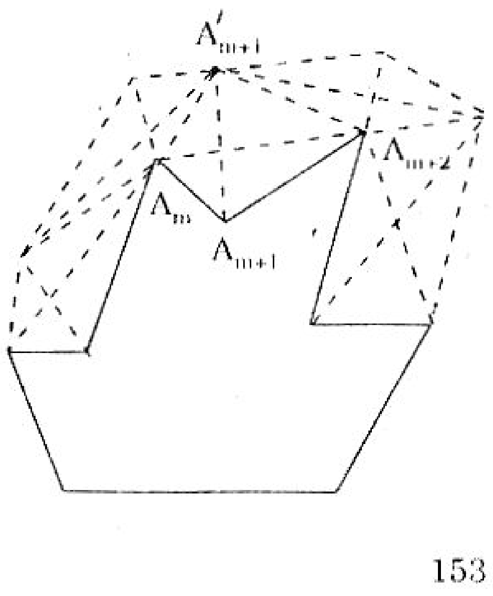
Hướng dẫn: Kẻ đường thẳng x đi qua A, x // BC và thực hiện phép đối xứng S_x: B → B', C → C' khi đó ta có:

$$AB + AB' + AC + AC' = 2(AB + AC) \ge BC' + B'C = 2BC$$

8. Có hay không một đa giác vừa có một tâm đối xứng vừa có một trục đối xứng?

9. Một đa giác (H) bất kì có chu vi 2p. Chứng minh rằng tồn tại một đa giác lồi (H^*) có chu vi bằng chu vi của (H) và diện tích không nhỏ hơn diện tích của (H).

Hướng dẫn: Nếu (H) là lồi, thì ta chọn (H) là (H^*). Nếu (H) lõm, chẳng hạn A_1, A_2, A_3, ..., A_n (xem hình) thì ta thực hiện các phép đối xứng qua các đường thẳng chứa các đường chéo của đa giác nối hai đỉnh A_mA_{m+2} không nằm trong đa giác biến đỉnh A_{m+1} thành đỉnh A'_{m+1}... Sau một số hữu hạn các phép đối xứng đó, đa giác mới nhận được là lồi có chu vi 2p và diện tích lớn hơn diện tích của (H) (vì nó chứa (H)). Đó là (H^*).

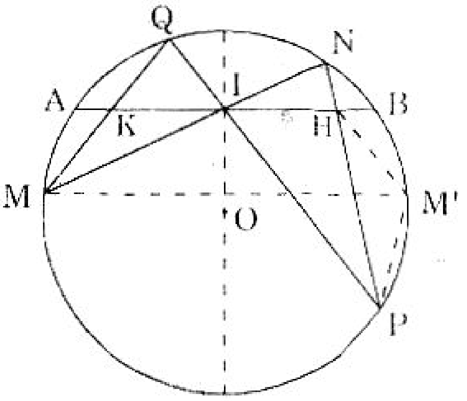


10. Cho đường tròn O và dây cung AB (khác đường kính). Qua trung điểm I của AB ta kẻ hai dây MN và PQ (N và Q thuộc cung nhỏ). Kí hiệu K và H là giao điểm của AB và các dây cung MQ, NP.

i) Gọi M' là ảnh của M trong phép đối xứng qua OI. Chứng minh rằng 4 điểm I, H, M', P cùng nằm trên một đường tròn.

ii) Chứng minh rằng: IK = IH.

Hướng dẫn:



i) Phép đối xứng qua OI biến cung AM thành cung BM' và số đo hai cung đó bằng nhau và $\widehat{AIM} = \widehat{BIM'}$.

Mặt khác $\widehat{NPM'} = \widehat{AIM}$ (cùng chắn các cung có số đo bằng nhau).

Vậy I, H, M', P cùng thuộc một đường tròn.

ii) Ta thấy $\Delta IHM' = \Delta IKM$.

11. Cho hình thang ABCD (AB // CD) và (d) là đường trung trực của AB. Giả sử C và D nằm về hai phía đối với (d). Gọi D' là ảnh của D trong phép đối xứng S_d.

i) Khảo sát vị trí tương đối của các điểm D' và C (đối với (d)) tùy theo số đo của các góc $\widehat{D}$ và $\widehat{C}$.

ii) Hãy so sánh AC và BD trong các trường hợp: $\widehat{D} > \widehat{C}$; $\widehat{D} = \widehat{C}$.

iii) Xét bài toán trong trường hợp C và D cùng phía với (d).

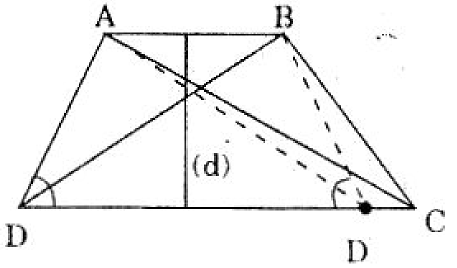
Hướng dẫn:

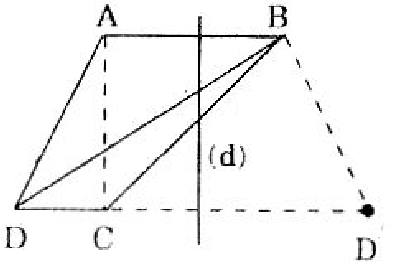
i) Nếu $\widehat{D} > \widehat{C}$, thì D' gần (d) hơn so với khoảng cách từ C đến (d).

Nếu $\widehat{D} = \widehat{C}$, thì D' ≡ C.

ii) Nếu $\widehat{D} > \widehat{C}$, thì D' ∈ DC ⇒ AC > AD' = BD.

Nếu $\widehat{D} = \widehat{C}$ ⇒ D' ≡ C và AC = BD.

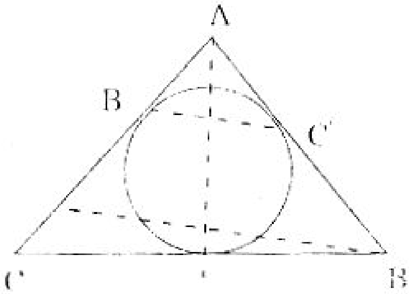




12. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC tương ứng tại C' và B'. Chứng minh rằng:

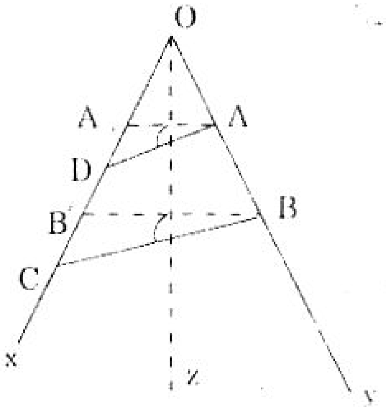
$$CC' > BB' \Leftrightarrow AC > AB.$$

Hướng dẫn: Gọi B'' là ảnh của B trong phép đối xứng qua phân giác góc A. Hãy so sánh C''C' và B''C'.



13. Cho góc xOy và tứ giác lồi ABCD có các cạnh AB = CD. Cạnh AB và CD của tứ giác nằm tương ứng trên các tia Ox và Oy (A và D gần đỉnh O hơn B và C). Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm của AD và BC song song hoặc trùng với phân giác của góc.

Hướng dẫn: Kí hiệu Oz là tia phân giác của $\widehat{xOy}$, phép đối xứng S_{Oz}: A → A', B → B'. Các đường trung bình của hai tam giác ADA' và BCB' song song và bằng nhau.



14. Cho đường thẳng (d) và hai điểm A, B nằm cùng phía với (d). Trên (d) ta lấy điểm M sao cho MA = MB. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua (d), N là giao điểm của AB' và (d). Chứng minh rằng 4 điểm A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn.

15. Cho tam giác ABC và H là chân đường cao của tam giác hạ từ A. Kí hiệu H', H'' là ảnh của H trong các phép đối xứng qua AB và AC. Chứng minh rằng đường thẳng H', H'' đi qua chân các đường cao tam giác hạ từ các đỉnh B và C.

Dựng hình

1. Dựng tam giác ABC, biết AB = c, đường cao h_c và $A - B = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$.

Hướng dẫn: Gọi x là đường thẳng qua C và x // AB.

Phép đối xứng S_x: B → B'

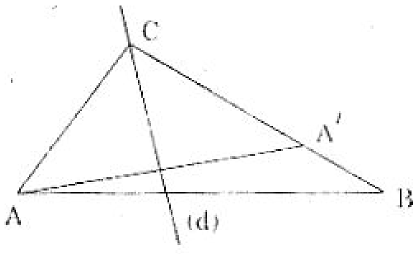
$\Rightarrow \widehat{ACB'} = C + 2B = 180^\circ - A + B = 180^\circ - (A - B) = 180^\circ - \alpha.$

Vậy $C \in x$ // AB và x cách AB một khoảng h_c, $C \in$ cung chứa góc $(180^\circ - \alpha)$ dựng trên đoạn AB'.

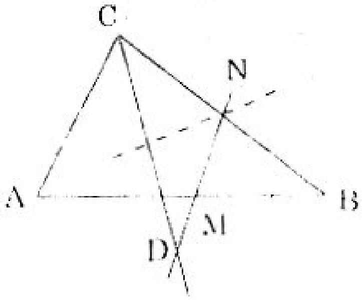
2. Cho hai điểm A, B và đường thẳng (d). Hãy dựng tam giác có hai đỉnh là A, B và phân giác góc C nằm trên (d).

Hướng dẫn: Giả sử ABC là tam giác đã dựng. Phép đối xứng:

S_d: A → A' ∈ BC ⇒ C là giao điểm của (d) và A'B.

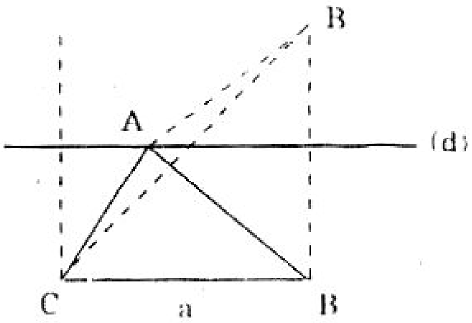


3. Cho hai điểm phân biệt M, N và đường thẳng (d). Hãy dựng tam giác ABC sao cho M, N là trung điểm các cạnh AB, BC và phân giác góc C nằm trên (d).



Hướng dẫn: Giả sử ABC là tam giác đã dựng. Rõ ràng MN // AC. Gọi D là giao điểm của MN và (d), khi đó tam giác CND cân tại N và phép đối xứng S_x: D → C, x là đường vuông góc với (d) và đi qua N.

4. Cho đường thẳng x và điểm A ∉ x. Hãy dựng đoạn BC = a nằm trên x sao cho AB + AC nhỏ nhất.



Hướng dẫn: Dựng qua A đường thẳng (d) // x và thực hiện phép đối xứng S_d: B → B', C → C'. Rõ ràng:

$$\begin{aligned} AB + AC &= AB' + AC \\ &= AB + AC' \geq B'C \\ &= \sqrt{4h^2 + a^2}, \end{aligned}$$

h là khoảng cách từ A đến x.

5. Dựng tam giác ABC, biết các điểm H', H'', H''' là ảnh của trực tâm H của tam giác ABC trong phép đối xứng qua 3 cạnh tam giác.

Hướng dẫn: Các điểm H', H'', H''' cùng nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác H' H'' H'''.

6. Cho 3 đường thẳng x, y, z cắt nhau tại O. Hãy dựng tam giác ABC sao cho 3 đường thẳng đã cho là các đường trung trực và bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng R.

Hướng dẫn: Kí hiệu α, β, γ là các góc tạo bởi các cặp đường thẳng đã cho. Các cạnh: $AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\beta$, $CA = 2R\sin\gamma$.

7. Cho đường thẳng (d) và hai đường tròn (O), (O') nằm về hai phía với (d) (không có điểm chung với (d)). Hãy dựng hình thoi ABCD sao cho các đỉnh A, C thuộc (d) và $ABC = \varphi$ ($\varphi < 90°$), các đỉnh còn lại thuộc (O) và (O').

Hướng dẫn: Phép đối xứng S_d: B → D, do đó (O) → (O') đi qua D và D là giao điểm của O' và O''.

Tìm tập hợp điểm

1. Cho hình vuông ABCD. Tìm tập hợp các đỉnh của một tứ giác lồi sao cho 4 đỉnh hình vuông là trung điểm của 4 cạnh tứ giác.

Hướng dẫn: Giả sử X là điểm bất kì thuộc hình vuông ABCD. Phép đối xứng $S_{AB}: X \to M$, $S_{AD}: X \to Q$ $\Rightarrow$ $Z_A: M \to Q$

(Xem kết quả bài 6 *phần chứng minh các tính chất hình học*).

Điều đó chứng tỏ các đỉnh M, N, P, Q của tứ giác lồi có tính chất đã nêu thuộc ảnh của ABCD trong các phép đối xứng S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA}. Đảo lại nếu MNPQ là tứ giác có 4 đỉnh thuộc 4 ảnh của ABCD trong các phép đối xứng S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA}, thì giao điểm của MP và NQ là điểm thuộc ABCD.

2. Cho hai tam giác ABC. Tìm tập hợp 4 đỉnh của một tứ giác lồi sao cho các đỉnh tam giác là trung điểm của 3 cạnh tứ giác.

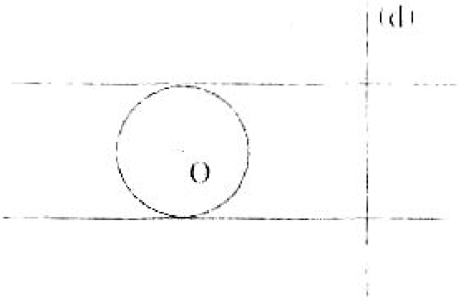
Hướng dẫn: Xem cách giải bài 1.

3. Cho đường tròn (O; R) và dây cung AB = a (a là số dương cho trước và a < 2R). Tìm tập hợp các điểm đối xứng với tâm O qua AB, khi dây AB biến thiên.

ĐS: Là đường tròn tâm O, bán kính $R' = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$.

4. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d). Với mỗi đường thẳng x ⊥ (d) ta lấy đối xứng của (O; R) qua x và tìm tập hợp ảnh của (O; R) khi x biến thiên.

ĐS: Là dải mặt phẳng được giới hạn bởi hai tiếp tuyến của (O; R) có phương vuông góc với (d).



5. Cho hai điểm cố định A, B. Với mỗi đường thẳng x đi qua B ta lấy đối xứng điểm A qua x. Tìm tập hợp ảnh của A, khi x biến thiên.

ĐS: Là đường tròn.

6. Cho đoạn thẳng AB và điểm C cố định không thuộc đoạn AB. Với mỗi đường thẳng x đi qua C ta lấy đối xứng đoạn AB qua x. Tìm tập hợp ảnh của AB, khi x thay đổi.

Hướng dẫn: Dùng kết quả bài 5. Tập hợp ảnh của AB là hình vành khuyên được giới hạn bởi hai đường tròn là ảnh của các điểm A và B.

Phép đối xứng qua một đường thẳng trong hệ trực chuẩn

1. Tìm ảnh của điểm M (1; –2) trong phép đối xứng qua đường thẳng (d): y = 2x.

ĐS: $M'\left(-\frac{11}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

2. Tìm ảnh của đường tròn: $x^2 + y^2 = 4$ trong phép đối xứng qua đường thẳng (d): $y = -x - 1$.

ĐS: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

3. Tìm ảnh của trục Ox trong phép đối xứng qua đường thẳng: (d): $y = x - 1$.

ĐS: $x = 1$.

4. Tìm ảnh của parabol: $y = x^2$ trong phép đối xứng qua đường thẳng: $y = -2$.

ĐS: $y = -x^2 - 4$.

5. Tìm ảnh của parabol: $y = 2x^2$ trong phép đối xứng qua đường thẳng (d): $x = 2$.

ĐS: $y = 2(x - 4)^2$.

6. Tìm ảnh của đường thẳng: $y = ax + b$ trong phép đối xứng qua

i) đường thẳng: $y = m$ ii) đường thẳng: $x = n$

iii) đường thẳng: $y = x$.

7. Cho hai điểm A(4; 0) và B(0; 8). Tìm phép đối xứng qua một trục biến A thành B.

ĐS: Trục đối xứng có phương trình: $y = 0{,}5x + 3$.

8. Cho hai đường thẳng: $y = x + 2$ và $y = -2x + 2$. Tìm phép đối xứng qua trục, biến đường thẳng này thành đường thẳng kia.

9. Cho hai đường thẳng: $y = kx + p$ và $y = kx + q$. Tìm phép đối xứng trục, biến đường thẳng này thành đường thẳng kia.

ĐS: Trục đối xứng có phương trình: $y = kx + \frac{p + q}{2}$.

10. Cho hai đường tròn (w) và (w') có phương trình tương ứng:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{và} \quad (x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 9.$$

Tìm phép đối xứng trục biến (w) thành (w').

ĐS: Trục đối xứng có phương trình: $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$.

11. Cho các điểm A(1; 2) và B(−4; −6). Tìm trên trục Ox điểm M sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Hướng dẫn: A và B nằm khác phía với Ox, nên M là giao điểm của AB và Ox.

12. Cho hai điểm A(2; 5) và B(−1; 3). Tìm trên trục Ox điểm M sao cho

i) $|MA - MB|$ lớn nhất; ii) MA + MB nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Kí hiệu C là giao của AB và Ox. Rõ ràng: $\overrightarrow{CA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB} \Rightarrow$ A.

B cùng phía với Ox.

M trùng với C thì $|MA - MB|$ lớn nhất.

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua Ox. D là giao điểm của AB' và Ox. M trùng với D thì MA + MB nhỏ nhất .

13. Cho hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Hãy tìm trên đường thẳng $y = kx + p$ điểm M sao cho:

i) MA + MB nhỏ nhất; ii) $|MA - MB|$ lớn nhất.

Hướng dẫn: Trường hợp AB // đường thẳng $y = kx + p$, thì MA + MB nhỏ nhất khi M là giao điểm của đường thẳng AB' và đường thẳng $y = kx + p$. B' đối xứng với B qua $y = kx + p$.

$|MA + MB|$ lớn nhất không có lời giải.

Trường hợp AB cắt đường thẳng $y = kx + p$ tại C, thì ta xét vị trí của A, B đối với đường thẳng $y = kx + p$ dựa trên chiều của các véctơ $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ và đưa bài toán về dạng cơ bản.

14. Dùng ngôn ngữ hình học để giải bài toán sau đây:

Tìm min của: $z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$ với $y = x$

(a, b, c, d là các số thực cho trước, $a \neq b$ và $c \neq d$).

Hướng dẫn: Xem A(a; b), B(x; y), C(c; d). A, C là hai điểm cố định còn B thay đổi trên đường thẳng $y = x$.

15. Dùng ngôn ngữ hình học để giải bài toán sau đây:

Tìm max của: $z = \left|\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}\right|$ với $y = x$

(a, b, c, d là số có thực cho trước).

16. Dùng ngôn ngữ hình học để giải bài toán sau đây:

Tìm min của: $F = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(y-a)^2 + b^2}$ với $|x - y| = k$

(a, b, k là các số thực cho trước).

Hướng dẫn: Xem A(a; b), B(x; 0), C(y; 0).

$$\Rightarrow \quad AB = \sqrt{(x-a)^2 + b^2}\,, \qquad AC = \sqrt{(y-a)^2 + b^2}$$

và bài toán được đưa về tìm các điểm B, C trên trục Ox sao cho AB + AC nhỏ nhất.

17. Tìm min của $F = \sqrt{(\sin x - 1)^2 + 3} + \sqrt{(\sin y - 1)^2 + 3}$

với $|\sin x - \sin y| = 1{,}5$.

18. Dùng ngôn ngữ hình học hãy chứng minh rằng:

$$|k(c-a)(d-b)| \le \sqrt{(b-a)^2+k^2b^2}\sqrt{(d-c)^2+k^2d^2} + $$
$$+\sqrt{(c-b)^2+k^2b^2}.\sqrt{(a-d)^2+k^2d^2}$$

trong đó: $ac < 0$, $bd < 0$. $k \neq 0$.

Hướng dẫn: Xem $A(a; 0)$, $C(c; 0)$. B và D thuộc đường thẳng $y = kx$ có các hoành độ tương ứng là b, d. Vì $bd < 0$, nên B, D nằm khác phía với AC, $ac < 0$, nên A, C khác phía với BD. Tứ giác ABCD là lồi. Sử dụng kết quả ví dụ 2, ta suy ra điều cần chứng minh.

19. Tìm min của biểu thức:

$$F = \sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2y^2-2y+1} \quad \text{với } |x-y| = 1.$$

Hướng dẫn: Ta viết lại: $F = \sqrt{x^2+(x-1)^2} + \sqrt{y^2+(y-1)^2}$

và xem $A(0; 1)$, $B(x; x)$, $C(y; y)$.

Các điểm B và C nằm trên đường thẳng $y = x$, điều kiện: $|x-y| = 1 \Leftrightarrow BC = \sqrt{2}$.

Vậy: $F = AB + AC \ge \sqrt{2}$ và "=" khi $B(0; 0)$, $C(1; 1)$.

20. Tìm min của biểu thức:

$$F = \sqrt{5x^2-2x+1} + \sqrt{5y^2-2y+1} \quad \text{với } |x-y| = \sqrt{5}$$

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 19. Xét điểm $A(1; 0)$ và các điểm $B(x; 2x)$, $C(y; 2y)$. Các điểm B, C thuộc đường thẳng $y = 2x$.

Điều kiện: $|x-y| = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad BC = 5$.

48. TÓM LƯỢC LÍ THUYẾT VỀ PHÉP TỊNH TIẾN

Định nghĩa

Cho véc tơ $\vec{U} \neq \vec{0}$, với mỗi điểm M ta dựng điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.

khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép tịnh tiến theo $\vec{U}$ và kí hiệu $T_{\vec{U}} : M \to M'$.

Cho hình (H); tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc (H) lập thành một hình (H') được gọi là ảnh của hình (H) trong phép tịnh tiến.

Các tính chất

i) Nếu A', B' là ảnh của hai điểm A, B trong phép tịnh tiến $\left(-\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$, thì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

ii) Phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ biến 3 điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng, đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') // (d) hoặc (d') trùng với (d), biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' = ABC, biến góc $\widehat{xOy}$ thành góc $\widehat{x'O'y'} = \widehat{xOy}$ và biến đường tròn (O; R) thành đường tròn (O'; R), trong đó $\overrightarrow{OO'} = \vec{U}$.

iii) Phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ có ngược là phép biến đổi ngược $T_{(-\vec{U})}$.

49. DÙNG PHÉP TỊNH TIẾN ĐỂ GIẢI TOÁN

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 1. Cho hai điểm phân biệt A, B. Chứng minh rằng: $Z_B \bullet Z_A = T_{2\overrightarrow{AB}}$

Giả sử M là điểm bất kì, khi đó Z_A: M → M'

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}; \quad Z_B: M' \to M''$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{BM''} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{BM''} =$$

$$= 2(\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'B}) = 2\overrightarrow{AB}$$

và điều này chứng tỏ M'' là ảnh của M trong phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{U} = 2\overrightarrow{AB}$

Ví dụ 2. Cho hai phép biến đổi Z_A và $T_{\vec{U}}$ $(\vec{U} \neq \vec{0})$. Chứng minh rằng: $Z_A \bullet T_{\vec{U}}$; hoặc $T_{\vec{U}} \bullet Z_A$ là các phép đối xứng tâm.

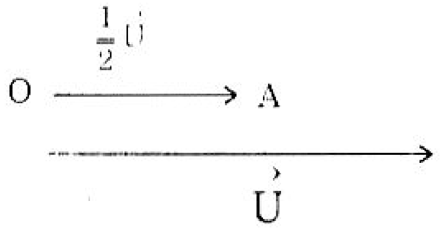
Giải

Đặt $Z = Z_A \bullet T_{\vec{U}}$; ta chỉ ra rằng Z có điểm bất động. Thật vậy; gọi O là điểm bất động của Z, khi đó:

$$T_{\vec{U}}: O \to O' \quad \text{và} \quad Z_A: O' \to O$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{O'O} = \vec{U} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{AO}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{AO} = \vec{U} \quad \Rightarrow \quad 2\overrightarrow{OA} = \vec{U}.$$



Đó là điều cần chứng minh.

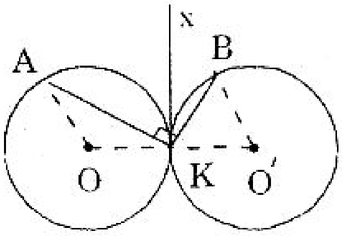
Giả sử M ≠ O, $T_{\vec{u}}$: M → M', O → O' $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}$

và Z_A: M' → M'', O' → O $\Rightarrow \overrightarrow{O'M'} = -\overrightarrow{OM''}$.

Kết hợp các kết quả đó, ta suy ra: $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM''}$.

Ví dụ 3. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R) tiếp xúc ngoài với nhau tại K. A, B là hai điểm tương ứng trên (O; R) và (O'; R) sao cho góc AKB = 1v. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{OO'}$ biến A thành B.

Giải



Từ giả thiết của bài toán, ta suy ra rằng các điểm A, B nằm cùng một phía đối với đường thẳng OO'. Kẻ tia Kx tiếp xúc với hai đường tròn tại K và nằm trong nửa mặt phẳng chứa hai điểm A, B có bờ là đường thẳng OO'. Ta có:

$$\widehat{AOK} = 2\widehat{AKx} \quad \text{và} \quad \widehat{BO'K} = 2\widehat{O'Kx}$$

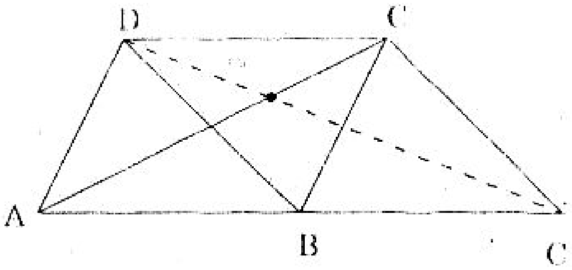
$$\Rightarrow \widehat{AOK} + \widehat{BO'K} = 2(\widehat{AKx} + \widehat{O'Kx}) = 180^\circ \Rightarrow OA \mathbin{//} O'B$$

Điều đó chứng tỏ ABO'O là hình bình hành và ta suy ra: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow$ A biến thành B.

Dựng hình

Ví dụ. Dựng hình bình hành, biết độ dài hai cạnh liên tiếp và góc tạo bởi hai đường chéo.

Giải



Giả sử ABCD là hình bình hành đã dựng có AB = a, BC = b và góc tạo bởi AC, BD bằng α.

Gọi C' là ảnh của B trong phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và xét tam giác ACC', trong tam giác đó ta có AC' = 2a, BC = b là trung tuyến và góc ACC' = α. Từ đó ta suy ra cách dựng.

- Dựng AC' = 2a và trung điểm B của AC'.
- Dựng cung chứa góc α trên dây AC'.
- Dựng cung tròn tâm B, bán kính b. Gọi C là giao của cung tròn tâm B, bán kính b và cung chứa góc α.
- Dựng điểm D là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{BA}$.

- *Biện luận:* Bài toán có nghiệm hay vô nghiệm tùy thuộc vào cung tròn tâm B, bán kính b và cung chứa góc α có điểm chung hay không có điểm chung.

Bài toán cực trị

Ví dụ. Trong số các tứ giác có góc tạo bởi hai đường chéo bằng α và độ dài các đường chéo đó bằng m và n; tứ giác nào có chu vi nhỏ nhất ?

Giải

Ta kí hiệu ABCD là tứ giác thỏa mãn điều kiện bài toán. Gọi A', C' là ảnh của các đỉnh A, C trong phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{DB}$, khi đó chu vi tứ giác ABCD bằng: $AB + BC' + BC + BA'$.

Vì $BA + BC' \geq AC'$ (*) và $BC + BA' \geq CA'$ (**)

Dấu bằng trong (*) và (**) xảy ra đồng thời khi B là giao các đường chéo của hình bình hành ACC'A'.

trong đó: $AC' = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}$ và $A'C = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\alpha}$

Vậy chu vi tứ giác nhỏ nhất khi tứ giác đó là hình bình hành.

Phép tịnh tiến trong hệ tọa độ trực chuẩn

Ví dụ 1. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và véc tơ $\vec{U}(a; b)$. Tìm ảnh của M trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$.

Giải

Kí hiệu M'(x'; y') là ảnh của M trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$, khi đó ta có:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{U} \Rightarrow \begin{cases} x' - x_0 = a \\ y' - y_0 = b \end{cases}$$

và do đó ta có: $\begin{cases} x' = x_0 + a \\ y' = y_0 + b \end{cases}$ hay $M'(x_0 + a, y_0 + b)$.

Ví dụ 2. Tìm ảnh của đường thẳng (d) cho bởi phương trình: $y = 2x$ trong phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{U}(1; -1)$.

Giải

Ta biết rằng phép tịnh tiến bảo toàn phương của đường thẳng, vì vậy nếu (d') là ảnh của (d) trong phép tịnh tiến đó, thì (d') có phương trình: $y = 2x + m$ (m là số thực bất kì). Ta thấy (d) đi qua O(0; 0), ảnh O' của O trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ có tọa độ là (1; -1) và thuộc (d') $\Rightarrow m = -3$.

Phương trình của (d') có dạng: $y = 2x - 3$.

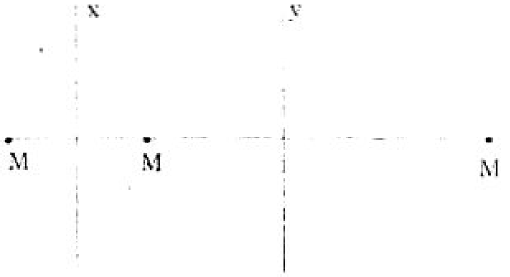
Chứng minh các tính chất hình học

1. Cho hai đường thẳng x và y song song với nhau. Chứng minh rằng phép biến đổi $T = S_y \bullet S_x$ là phép tịnh tiến.

Hướng dẫn: Giả sử M là điểm bất kì, khi đó:

$S_x: M \to M'$, $S_y: M' \to M''$.

Ta kí hiệu H là trung điểm của MM', K là trung điểm của M'M''.



Ta có: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM'}$, $\overrightarrow{M'K} = \overrightarrow{KM''}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{MM''} = 2(\overrightarrow{HM'} + \overrightarrow{M'K}) = 2\overrightarrow{HK}$.

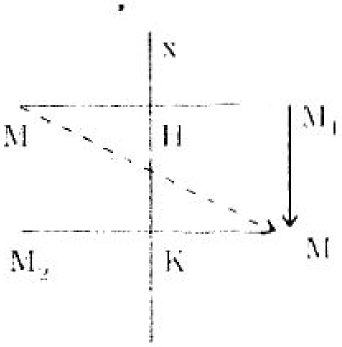
Theo giả thiết x // y và $\overrightarrow{HK} \perp x$, nên phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{HK}}: x \to y \Rightarrow \overrightarrow{HK}$ là véc tơ đã được xác định. Hệ thức $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{HK}$ chứng tỏ T là phép tịnh tiến theo $\vec{U} = 2\overrightarrow{HK}$, biến $M \to M''$.

2. Cho đường thẳng x và véc tơ $\vec{U}$ ($\vec{U} \neq \vec{0}$).

Chứng minh rằng nếu $T_{\vec{U}} \bullet S_x = S_x \bullet T_{\vec{U}}$, thì $\vec{U}$ // x.

Hướng dẫn: Giả sử M là điểm bất kì phép biến đổi:

$T_{\vec{U}} \bullet S_x: M \to M'$ (*) và $S_x \bullet T_{\vec{U}}: M \to M'$ (**)



Từ (*) ta có $S_x: M \to M_1$ $\Rightarrow$ $MM_1 \perp x$ tại H.

$T_{\vec{U}}: M_1 \to M'$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{U}$.

Từ (**) ta có $T_{\vec{U}}: M \to M_2$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MM_2} = \vec{U}$,

$S_x: M_2 \to M'$ $\Rightarrow$ $M_2M' \perp x$ tại K

Vì vậy: $MM_1 // M_2M'$, $\overrightarrow{M_1M'} = \overrightarrow{MM_2}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M_2}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M'M_2}$

Tứ giác $MM_1M'M_2$ là hình bình hành nhận x là trục đối xứng

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{KH} // \overrightarrow{MM_2} // \overrightarrow{M_1M'}$

3. Cho hai điểm phân biệt A và B.

Chứng minh rằng phép biến đổi: $T = Z_B \bullet Z_A$ là một phép tịnh tiến.

Hướng dẫn: Giả sử M là điểm bất kì $Z_A: M \to M'$, $Z_B: M' \to M''$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM'}, \quad \overrightarrow{M'B} = \overrightarrow{BM''}$$

Do đó: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{BM''} = 2\overrightarrow{AB}$ và điều này chứng tỏ T là phép tịnh tiến theo $\vec{U} = 2\overrightarrow{AB}$ biến M thành M''.

4. Chứng minh rằng tích của một số chẵn các phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến.

Hướng dẫn: Dùng phép quy nạp và xem lại bài 3.

5. Cho hai điểm phân biệt A, B và $\vec{U}$ $(\vec{U} \neq \vec{0})$.

Chứng minh rằng: $Z_B \bullet T_{\vec{U}} \bullet Z_A = T_{2\overrightarrow{AB}} \bullet T_{2\overrightarrow{OA}}$, trong đó: $2\overrightarrow{AO} = \vec{U}$.

Hướng dẫn: Giả sử M là điểm bất kì:

$$Z_A: M \to M_1, \quad T_{\vec{U}}: M_1 \to M_2, \quad Z_B: M_2 \to M'$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}, \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{U}$$

$$\overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{BM'}. \quad T_{2\overrightarrow{AB}}: M \to M^*, \quad T_{2\overrightarrow{OA}}: M^* \to M''.$$

Ta cần chứng tỏ: $M' \equiv M'' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM''}$.

6. Cho phép đối xứng Z_0 và phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$.

Chứng minh rằng: $T_{\vec{U}} \bullet Z_0$ hoặc $Z_0 \bullet T_{\vec{U}}$ là phép đối xứng tâm.

Hướng dẫn: Ta xét phép biến đổi $Z = Z_0 \bullet T_{\vec{U}}$. Trước hết ta chỉ ra rằng Z có điểm bất động. Thật vậy, nếu S là điểm bất động, thì

$$T_{\vec{U}}: S \to S^* \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{SS^*} = \vec{U} \quad \text{và} \quad Z_0: S^* \to S$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{S^*O} = \overrightarrow{OS} \quad \Rightarrow \overrightarrow{OS} = -0.5\vec{U}.$$

Bây giờ ta chỉ ra rằng Z là phép đối xứng tâm. Giả sử A là điểm bất kì khác S, $T_U: A \to A^*$, $S \to S^*$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{S^*A^*}; \ Z_0: A^* \to A', \quad S^* \to S \ \Rightarrow \ \overrightarrow{S^*A^*} = -\overrightarrow{SA'}.$$

Kết hợp các kết quả đó, ta suy ra: $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{A'S}$.

7. Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_n$. Gọi $B_1B_2...B_n$ là ảnh của $A_1A_2...A_n$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$; $C_1C_2...C_n$ là ảnh của $A_1A_2...A_n$ trong phép đối xứng Z_O. Chứng minh rằng các đường thẳng B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n đồng quy .

Hướng dẫn: Dùng kết quả bài 6 .

8. Cho tứ giác lồi ABCD có AB = CD.

i) Kí hiệu M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC. Chứng minh rằng các đường thẳng AB và CD tạo với MN những góc bằng nhau.

ii) Kí hiệu P, Q lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng AB và CD tạo với PQ những góc bằng nhau.

Hướng dẫn:

i) Gọi B' là ảnh của B trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AM}$, C' là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{DN}$. Hãy chứng tỏ tam giác MB'C' cân và MN là phân giác của tam giác đó.

9. Trên giấy kẻ ô, ta dựng một hình bình hành sao cho 3 đỉnh của hình bình hành là các nút lưới. Chứng minh rằng đỉnh thứ tư của hình bình hành là nút lưới.

Hướng dẫn: Phép tịnh tiến biến một nút lưới thành một nút lưới, thì biến mọi đường lưới thành chính nó.

10. Trên giấy kẻ ô, ta dựng một đường thẳng đi qua hai nút lưới phân biệt. Chứng minh rằng trên đường thẳng đó còn có vô số các nút lưới khác.

Hướng dẫn: Nếu A, B là nút lưới thuộc (d), thì ảnh của A hoặc B trong các phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$ thuộc (d) và dùng kết quả bài 10.

11. Cho tứ giác ABCD và điểm M nằm trong nó sao cho tứ giác ABMD là hình bình hành và $\angle CBM = \angle CDM$.

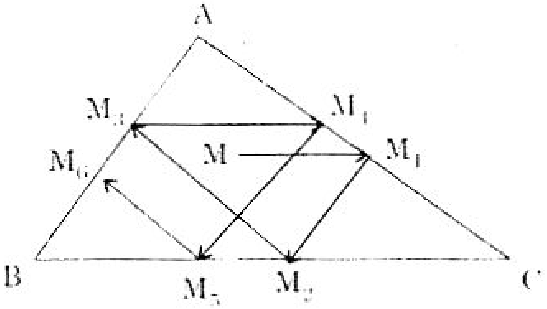
i) Kí hiệu C' là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$. Chứng minh rằng 4 điểm A, C, C', D cùng nằm trên một đường tròn.

ii) Chứng minh rằng $\widehat{ACB} = \widehat{MCD}$, $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

Hướng dẫn: i) $\Delta BCM = \Delta AC'D \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{DAC'} = \widehat{CDM} \quad \widehat{DCC'}$.

12. Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC chuyển động theo phương BC cho đến khi cắt cạnh AC, thì nó đổi hướng chuyển động theo phương AB cho đến khi cắt cạnh BC, thì nó lại đổi hướng chuyển động theo phương AC cho đến khi cắt cạnh AB... Chứng minh rằng sau một số lần đổi hướng chuyển động; quỹ đạo của M là khép kín.

Hướng dẫn: Kí hiệu $M_1M_2M_3...M_n$ là giao điểm của các quỹ đạo chuyển động của M với các cạnh tam giác (xem hình).



Vì $M_1M_2 \parallel AB$, $M_2M_3 \parallel AC$

$\Rightarrow T_{M_2M_3}: M_1 \to A,\ M_2 \to M_3$ và $C \to M_4$.

Vì $M_4M_5 \parallel AB$, $M_5M_6 \parallel AC$

$\Rightarrow T_{M_4M_5}: A \to M_6,\ M_3 \to B$ và $M_4 \to M_5$

$\Rightarrow T_{M_4M_5} \bullet T_{M_2M_3}: M_1 \to M_6,\ C \to M_5$.

Mặt khác: $T_{M_4M_5} \bullet T_{M_2M_3} = T_{\vec{U}} \Rightarrow \vec{U} = \overrightarrow{M_1M_6} = \overrightarrow{CM_5} \Rightarrow M_1M_6 \parallel BC$

Theo giả thiết $M_1M \parallel BC \Rightarrow$ đpcm.

13. Chứng minh rằng một đa giác có nhiều nhất là một tâm đối xứng.

Hướng dẫn: Giả sử đa giác H có hai tâm đối xứng là O_1 và O_2. Ta chọn hệ tọa độ sao cho $O_1(0; 0)$ và $O_2(a; 0)$ với $a > 0$. Ta xét điểm $A(x_0; y_0)$ bất kì thuộc H sao cho với mọi điểm $M(x; y_0)$ cũng thuộc H ta có $x \leq x_0$. Theo giả thiết $Z_{O_1} \bullet Z_{O_2}$ biến H thành H. Vì tích của hai phép đối xứng tâm là một phép tịnh tiến biến điểm A thành điểm $A'(x_0 + 2a; y_0)$ thuộc H. Thế thì $x_0 + 2a \leq x_0 \Rightarrow a < 0$. Trái với cách chọn a.

Các bài toán cực trị

1. Cho đường thẳng (d), điểm $A \notin (d)$ và số $a > 0$. Hãy tìm vị trí của đoạn $BC = a$ trên (d) sao cho $AB + AC$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Thực hiện phép tịnh tiến đoạn BC theo $\overrightarrow{BA}$, khi đó: $C \to C' \Rightarrow B \to A$, $BC \to AC' = a$. Bài toán quy về tìm điểm C trên sao cho $CA + CC'$ nhỏ nhất.

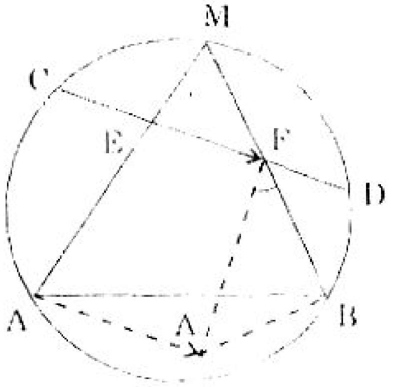
2. Cho hai đường thẳng x, y song song và hai điểm A, B nằm về hai phía đối với dải mặt phẳng được giới hạn bởi x và y (x là bờ của nửa mặt phẳng chứa A, y là bờ của nửa mặt phẳng chứa B). Trên x ta lấy điểm M, trên y ta lấy điểm N sao cho $MN \perp x$. Tìm vị trí của đoạn MN sao cho $AM + MN + NB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Thực hiện phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{MN}$, điểm $A \to A' \Rightarrow AM \to A'N$ và $AA' + A'N + NB = AM + MN + NB$. Bài toán được đưa về tìm $N \in y$ sao cho $NA' + NB$ nhỏ nhất.

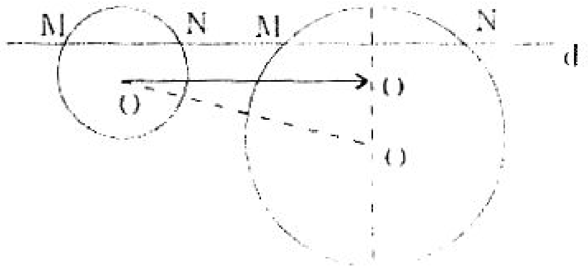
Dựng hình

1. AB và CD là hai dây cung của đường tròn O không có điểm chung. Hãy dựng điểm M thuộc O sao cho các dây cung MA, MB cắt dây CD thành một đoạn có độ dài a cho trước ($a < CD$).

Hướng dẫn: Giả sử E, F là giao điểm của các dây MA, MB và dây CD, EF = a. Tịnh tiến A theo véc tơ $\overrightarrow{EF}$, ta nhận được điểm A' là ảnh của A còn E → F và A'F // MA, $\widehat{A'FB} = \widehat{AMB}$. Mặt khác, E và F thuộc dây MA và MB, nên M nằm khác phía với AB đối với CD, nghĩa là M thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$, đặt $\alpha = \widehat{AMB}$, khi đó $\widehat{A'FB} = \alpha$. Vậy thì F là giao điểm của cung chứa góc α được dựng trên đoạn A'B và dây CD.



2. Cho hai đường tròn (O), (O') và một phương (d). Hãy dựng đường thẳng (d') // (d) cắt đồng thời hai đường tròn thành hai dây cung có độ dài bằng nhau.



Hướng dẫn: Giả sử M, N là giao điểm của (d') và đường tròn (O); M', N' là giao của (d') và (O') sao cho MN = M'N'.

Tịnh tiến O theo véc tơ $\overrightarrow{MM'}$, khi đó:

O → O'', M → M', N → N'. Rõ ràng O''O' vuông góc với M'N' và do đó O''O' vuông góc với phương (d) hay OO'' ⊥ O''O', điểm O'' thuộc đường tròn đường kính O'O. Mặt khác O'' nằm trên đường thẳng đi qua O' và vuông góc với phương (d).

3. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AC = m, BD = n, góc tạo bởi hai đường chéo bằng α và độ dài của hiệu hai đáy bằng 1.

Hướng dẫn: Tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$, khi đó A → B, C → C' ⇒ AC → BC' và tam giác BC'D hoàn toàn được xác định. Gọi P là trung điểm của BD, Q là trung điểm của AC, ta thấy PQ = 1 và PQ // CD, C là giao điểm của DC' và đường thẳng qua Q và song song với BC.

5. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AC = m, BD = n, góc tạo bởi hai đường chéo bằng α và BC = 1.

Hướng dẫn: Xem cách dựng bài 4, chú ý rằng C thuộc đường tròn tâm B, bán kính R = 1.

6. Dựng tứ giác, biết bốn góc và hai đường chéo.

Tìm tập hợp điểm

1. Cho hai đường thẳng x, y và số a > 0.

i) Tìm tập hợp điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến x và y bằng a.

ii Tìm tập hợp điểm M sao cho hiệu các khoảng cách từ đó đến x và y bằng a.

Hướng dẫn:

i Trường hợp x // y và a là khoảng cách giữa x và y, thì tập M là một dải mặt phẳng được giới hạn bởi x và y. Nếu khoảng cách đó khác a, thì tập M là rỗng hoặc là một trong hai đường thẳng song song với x, y và cách x hoặc y một khoảng $\frac{a-1}{2}$, 1 là khoảng cách từ x đến y.

Trường hợp x cắt y tại O. Lấy trên x hai điểm A, C sao cho chúng cách y một khoảng a, trên y lấy hai điểm B, D cách x một khoảng a. Tứ giác ABCD là hình chữ nhật và tập M là 4 cạnh của hình chữ nhật đó.

2. Cho hình bình hành ABCD có cạnh AB = a cố định, các đỉnh C, D thay đổi thỏa mãn điều kiện: $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{AD}$. Tìm tập hợp các đỉnh C và D.

Hướng dẫn: $\frac{AC}{AB} = \frac{BD}{AD} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BD^2}{AD^2} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{AC^2 + BD^2}{AB^2 + BC^2} = 2$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

D là ảnh của C trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$.

3. Cho tập hợp n điểm (n > 2) $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Với mỗi điểm M ta dựng điểm N sao cho: $n.\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n}$. Tìm tập hợp N khi M thay đổi trên một đường thẳng cố định.

4. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha$ $(0 < \alpha < 180^\circ)$ và véc tơ $\vec{U} \neq \vec{0}$. Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}: \widehat{xOy} \to \widehat{x'O'y'}$. Tìm tập hợp điểm chung của cả hai miền góc.

ĐS: Tập hợp đó có thể rỗng hoặc là một miền đa giác hoặc là một góc bằng góc đã cho hoặc là một tia.

Tính các yếu tố hình học

1. Cho hình vuông ABCD có diện tích bằng 1. Tịnh tiến ABCD theo véc tơ $\vec{U}$ có độ dài bằng 0,5.AB và $\vec{U}$ tạo với $\overrightarrow{AB}$ một góc 60°. Tính diện tích phần chung của hình vuông ABCD và ảnh của nó qua phép tịnh tiến.

ĐS: $\frac{12 - 3\sqrt{3}}{16}$.

2. Từ đỉnh B của hình bình hành ABCD ta kẻ các đường cao BH và BK, biết KH = a, BD = b (b > a). Tính khoảng cách từ B đến trực tâm tam giác BHK.

Hướng dẫn: Gọi H_1 là trực tâm tam giác BKH, thế thì H_1H // AD và H_1K // DC. Tịnh tiến theo $\overrightarrow{H_1H}$ điểm K → D, B → B' ∈ BC ⇒ B'H = H_1B. Tam giác B'KH vuông tại H có KH = a, KB' = BD = b (tứ giác BB'DK là hình chữ nhật).

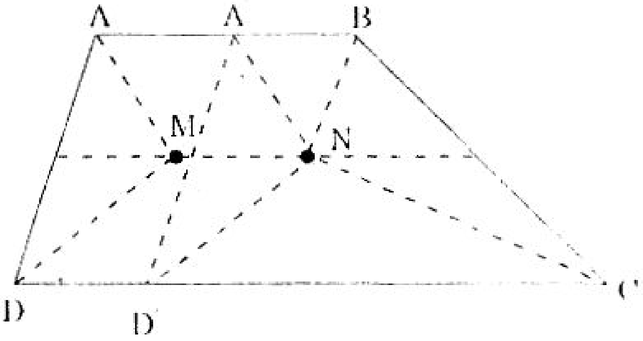
ĐS: $\sqrt{b^2 - a^2}$.

3. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng S. AD = 2AB và $\widehat{BAD} = 60°$. Bên trong hình bình hành ta lấy điểm M sao cho AM là phân giác của góc $\widehat{BAD}$ và 2MA = AB. Phép tịnh tiến ABCD theo véc tơ $\overrightarrow{AM}$ biến nó thành hình bình hành A'B'C'D'. Tính diện tích phần chung của hai hình ABCD và A'B'C'D'.

4. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB; CD; AD và BC, biết MN = a, PQ = b và AB + CD = 2a, AD + BC = 2b. Tính các cạnh tứ giác.

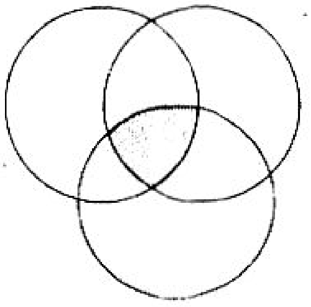
5. Hình thang ABCD (AB // CD) có AB = a. BC = b, CD = c. DA = d. Gọi M là giao điểm các phân giác của góc A và D, N là giao điểm các phân giác của góc B và C. Tính khoảng cách từ M đến N.

Hướng dẫn: Rõ ràng khoảng cách từ M và N đến AB và CD bằng nhau, do đó MN // AB. Thực hiện phép tịnh tiến các điểm A và D theo $\overrightarrow{MN}$, ta được ảnh của chúng là A' và D'. Hình thang A'BCD' nhận N là tâm đường tròn nội tiếp ⇒ $MN = \frac{|a - b + c - d|}{2}$.



6. Cho đường tròn (O; R) và các véc tơ $\vec{U}$, $\vec{U'}$ có độ dài bằng R, góc nhọn tạo bởi hai véc tơ bằng 60°.

Thực hiện phép tịnh tiến (O; R) theo các véc tơ $\vec{U}$, $\vec{U'}$. Tính diện tích phần chung của hình tròn (O; R) và hai ảnh của nó trong hai phép tịnh tiến.



ĐS: $\frac{R^2(\pi - \sqrt{3})}{2}$.

Phép tịnh tiến trong hệ trực chuẩn

1. Tìm ảnh của đường tròn: $x^2 + y^2 = R^2$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$, $\vec{U}(a; b)$.

ĐS: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

2. Tìm ảnh của đường thẳng: $y = -3x + 5$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$, $\vec{U}(1; -4)$.

ĐS: $y = -3x + 4$.

3. Tìm ảnh của đường thẳng: $y = kx + q$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$, $\vec{U}(a; b)$.

ĐS: $y = kx + m$ với $m = b + q - ka$.

4. Tìm ảnh của parabol: $y = ax^2$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$, $\vec{U}(x_0; y_0)$.

Hướng dẫn: Trong phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$, hệ tọa độ xOy → Hệ tọa độ XO'Y, $O'(x_0; y_0)$. Kí hiệu $(x; y)$ là tọa độ của điểm M trong hệ xOy, $(X; Y)$ là tọa độ của nó trong hệ XO'Y. Xuất phát từ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ = tọa độ của M trong cả hai hệ tọa độ liên hệ với nhau bởi hệ: $x = x_0 + X$ và $y = y_0 + Y$. Trong hệ XO'Y, parabol (P') là ảnh của parabol đã cho có phương trình $Y = aX^2$, trong hệ tọa độ xOy, (P') có phương trình: $y - y_0 = a(x - x_0)^2$.

5. Cho đường tròn: $x^2 + y^2 = 9$ và đường thẳng (d): $y = x + 12$. Hãy tìm phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ biến (d) thành (d') sao cho (d') tiếp xúc với đường tròn.

Hướng dẫn: Các tiếp tuyến của đường tròn song song với (d) có phương trình: $y = x + 3\sqrt{2}$ và $y = x - 3\sqrt{2}$. Hãy tìm phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ biến (d) thành một trong các tiếp tuyến đó (xem bài 7).

6. Cho parabol: $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x - 10$. Hãy tìm một phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ biến (d) thành (d') sao cho (d') tiếp xúc với parabol.

7. Tìm phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ biến đường thẳng: $y = 2x$ thành đường thẳng: $y = 2x + 5$.

ĐS: Có nhiều phép tịnh tiến chẳng hạn $T_{\vec{U}}$ với $\vec{U}(0; 5)$ hoặc $\vec{U}(-1; 3)$ ...

8. Tìm phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ biến đường tròn (w): $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

thành đường tròn (w'): $(x - 11)^2 + (y + 21)^2 = 25$.

ĐS: $\vec{U}(14; -23)$.

9. Cho các điểm $A(0; a)$ và $B(b; c)$ $(a > 0, c < 0)$. Hãy tìm trên trục hoành Ox các điểm M, N sao cho $MN = k$ ($k > 0$ cho trước) và $AM + BN$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Thực hiện tịnh tiến điểm B theo $\overrightarrow{NM}$ ta được điểm B' có tọa độ $(b + k; c)$ hoặc $(b - k; c)$ khi đó:

$$MB' = NB \Rightarrow AM + BN = AM + B'M.$$

Bài toán được quy về tìm vị trí M sao cho $AM + B'M$ nhỏ nhất.

10. Dùng kết quả bài 7 để giải bài toán sau:

Tìm min của $F = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{y^2 - 8y + 25}$ với $|x - y| = 1$.

Hướng dẫn: Ta viết lại: $F = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(y - 4)^2 + 9}$ và xem M(x; 0), N(y; 0), A(0; 5), B(4; −3).

11. Dùng kết quả bài 7 để giải bài toán sau:

Tìm min của $F = \sqrt{2x^2 - 6x + 9} + \sqrt{2y^2 - 16y + 64}$

với $|x - y| = \sqrt{2}$.

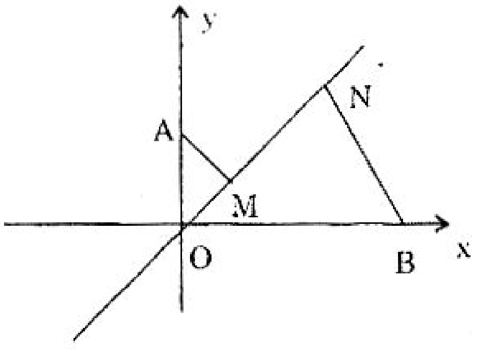
Hướng dẫn:

Ta viết lại:

$$F = \sqrt{x^2 + (x - 3)^2} + \sqrt{(y - 8)^2 + y^2}$$

và xem M(x; x), N(y; y),

A(0; 3), B(8; 0).



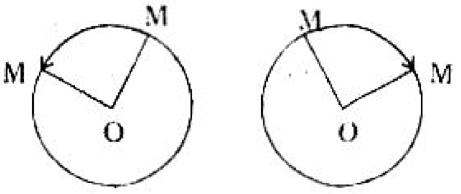
12. Cho điểm A(0; a), B(b; c) (a > 0, c < 0) và đường thẳng (d) có phương trình: y = b (0 < b < a). Hãy tìm trên (d) điểm M, trên Ox điểm N sao cho MN // Oy và AM + BN nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Tịnh tiến điểm A theo véc tơ $\overrightarrow{MN}$ ta được A'(a − b; 0). Giao điểm của A'B và Ox là điểm N.

51. TÓM TẮT LÍ THUYẾT VỀ PHÉP QUAY

Định nghĩa

Cho điểm O và góc α với $0 \le \alpha \le 180°$. Phép biến đổi O thành O và biến mọi điểm M khác O thành điểm M' sao cho:



i) OM' = OM

ii) $\widehat{MOM'} = \alpha$

iii) Chiều di động của M trên đường tròn tâm O bán kính OM đến trùng với điểm M' là chiều ngược với chiều kim đồng hồ, phép biến đổi đó được gọi là phép quay và kí hiệu: $R_O(\alpha)$: M → M'. Nếu chiều di động của điểm M trên đường tròn tâm O, bán kính OM đến trùng với điểm M' cùng với chiều kim đồng hồ, thì phép quay được kí hiệu $R_O(-\alpha)$: M → M'. Ta gọi phép quay $R_O(-\alpha)$ là phép quay theo chiều dương, còn phép quay $R_O(\alpha)$ là phép quay theo chiều âm (trong mặt phẳng có hai chiều quay xác định). Điểm bất động O được gọi là tâm quay, góc α được gọi là góc quay.

Cho hình (H): tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc (H) trong phép quay $R_O(\alpha)$ hoặc $R_O(-\alpha)$ lập thành một hình (H') được gọi là ảnh của (H) trong phép biến đổi đó.

Rõ ràng $R_O(0)$ là phép đồng nhất. $R_O(180^\circ)$ là phép đối xứng qua O, tức là $R_O(180^\circ) = Z_O$.

Tính chất

i) Nếu A' và B' là ảnh của hai điểm A và B trong phép quay $R_O(\alpha)$, thì A'B' = AB.

ii) Phép quay $R_O(\alpha)$ biến 3 điểm A, B, C thẳng hàng thành 3 điểm A', B', C' cũng thẳng hàng và nếu B thuộc đoạn AC, thì B' cũng thuộc đoạn A'C'. Biến $\vec{U}$ thành $\vec{U'}$ và góc $(\widehat{\vec{U'}, \vec{U}}) = \alpha$. Đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') và góc tạo bởi chúng bằng α (nếu (d) cắt (d'), thì chúng lập thành 4 góc bé hơn 180°. Một trong 4 góc như vậy được gọi là góc tạo bởi (d) và (d')). Tam giác biến thành tam giác và hai tam giác đó bằng nhau. Đường tròn biến thành đường tròn và hai đường tròn có bán kính bằng nhau.

iii) Phép quay $R_O(\alpha)$ có ngược và đó là phép quay $R_O(-\alpha)$, nghĩa là $R_O(\alpha)$: M → M', thì $R_O(-\alpha)$: M' → M.

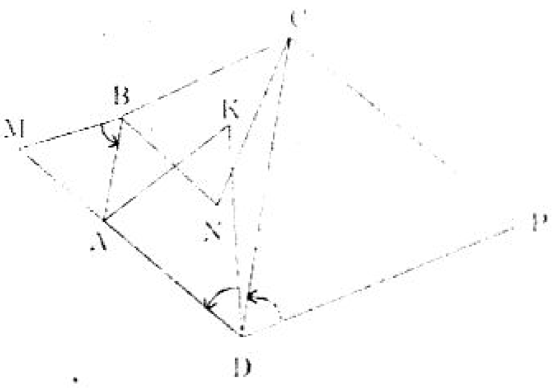
52. DÙNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI TOÁN

Dùng phép quay để giải toán thường phụ thuộc vào cách biểu diễn hình trên mặt phẳng. Vì vậy việc lựa chọn cách biểu diễn hình có liên quan rất mật thiết đến việc tìm ra lời giải bài toán. Ta xét các ví dụ sau:

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 1. Trên các cạnh AB và CD của tứ giác lồi ABCD và về phía ngoài tứ giác, ta dựng các tam giác đều ABM và CDP. Trên hai cạnh còn lại và về phía trong tứ giác ta dựng các tam giác đều BCN và ADK. Chứng minh rằng: MN = PK.

Giải



Rõ ràng:

Phép quay $R_B(60^\circ)$: M → A và N → C

⇒ MN = AC (*)

Phép quay $R_D(60^\circ)$: P → C và K → A

⇒ PK = AC (**)

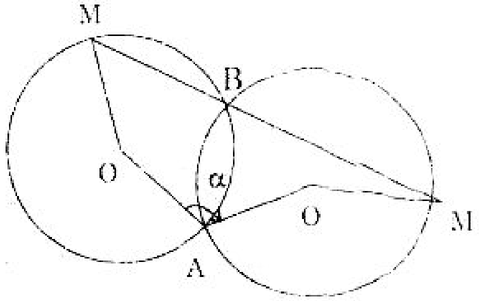
Từ (*) và (**), ta suy ra đpcm.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O; R) và điểm A thuộc đường tròn. Ta kí hiệu (O'; R) là ảnh của (O; R) trong phép quay $R_A(\alpha)$ và M' là ảnh của điểm M thuộc (O; R). Chứng minh rằng đường thẳng MM' đi qua giao điểm thứ hai của (O; R) và (O'; R).

Giải

Rõ ràng phép quay $R_A(\alpha)$: A → A, O → O', M → M'

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{AO'M'}$.



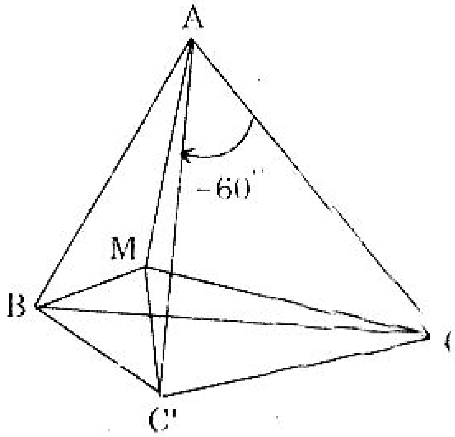
Mặt khác, ta có: $\widehat{AO'M'} = 2\widehat{ABM'}$ (B là giao điểm thứ hai của hai đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{ABM'} + \widehat{ABM} = 180^\circ$ và điều đó chứng tỏ MM' đi qua B.

Tính các yếu tố hình học

Ví dụ 3. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) có $\widehat{A} = 80^\circ$. Bên trong tam giác, ta lấy điểm M sao cho: $\widehat{MBC} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 10^\circ$. Tính góc $\widehat{MAC}$.

Giải



Thực hiện phép quay $R_A(-60^\circ)$: C → C', khi đó tam giác ACC' đều và ta suy ra $\widehat{BCC'} = 10^\circ$. Tam giác ABC' cân tại A có:

$\widehat{BAC'} = 20^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{CBC'} = 30^\circ$.

$\Delta BCC' = \Delta BCM$ (g.c.g)

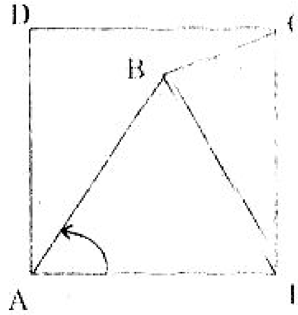
$\Rightarrow \quad CC' = CM = CA$.

Tam giác ACM cân tại C có:

$\widehat{ACM} = 40^\circ \quad \Rightarrow \quad \widehat{MAC} = 70^\circ$.

Ví dụ 4. Cho hình vuông ABCD và điểm M nằm trong hình vuông đó sao cho $\widehat{MAB} = 60^\circ$ và $\widehat{MCD} = 15^\circ$. Tính góc $\widehat{MBC}$.

Giải



Thực hiện phép quay $R_A(60^\circ)$: B → B'; khi đó tam giác ABB' đều và B' nằm trên tia AM và nằm trong hình vuông. Tam giác B'BC cân tại B có $\widehat{B'BC} = 30^\circ$, nên $\widehat{B'CB} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{B'CD} = 15^\circ$.

Điều đó chứng tỏ B' trùng với M và vì vậy $\widehat{MBC} = 30^\circ$.

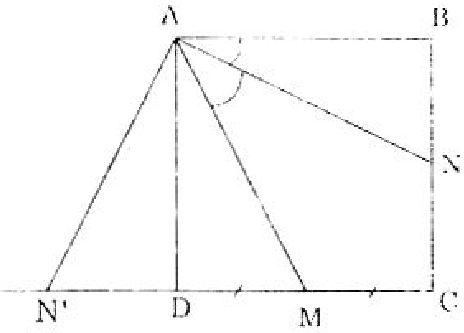
Ví dụ 5. Cho hình vuông ABCD cạnh a và M là trung điểm của cạnh CD. Tia phân giác của góc $\widehat{BAM}$ cắt cạnh BC tại N. Tính độ dài đoạn BN.

Giải

Thực hiện phép quay $R_A(90^\circ)$: B → D, khi đó góc vuông ABC → góc vuông ADx (Dx là tia đối của tia DC) và do đó N → N' ∈ Dx.

Ta có: DN' = BN, $\widehat{DAN'} = \widehat{MAN}$,

$$\widehat{AN'M} = \widehat{ANB} = \widehat{NAD} \text{ (so le) } = \widehat{MAN'}$$



Vì vậy tam giác AMN' cân tại M

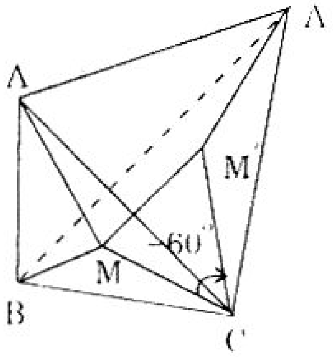
$$\Rightarrow \quad MA = MN' = MD + DN'$$

$$\Rightarrow \quad DN' = MA - MD = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Bài toán cực trị

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất và tính giá trị đó theo BC = a, AC = b và $\hat{C} = \alpha$.

Giải



Giả sử M là điểm bất kì trong mặt phẳng. Thực hiện phép quay $R_C(-60°)$: M → M', A → A', khi đó AM → A'M' và AM = A'M'.

Tam giác CMM' đều, do đó: MM' = CM.

Ta có: $\quad MA + MB + MC = M'A' + MB + MM' \geq$

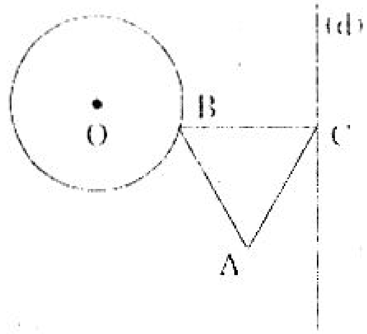
$$\geq BA' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + 60°)}.$$

Để $MA + MB + MC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha + 60°)}$, M và ảnh M' cùng thuộc đoạn BA'. Điều đó chứng tỏ $\widehat{CMA'} = \widehat{CAA'} = 60°$ và tứ giác CMAA' nội tiếp trong đường tròn. Điểm M phải tìm là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ACA' và đường thẳng BA'.

Dựng hình

Ví dụ 7. Cho đường tròn (O), đường thẳng (d) không có điểm chung với (O) và điểm A không nằm trên (d) và đường tròn (O). Hãy dựng tam giác đều ABC sao cho đỉnh B thuộc (O), đỉnh C thuộc (d).

Giải



- *Phân tích:* Giả sử ABC là tam giác đã dựng. Phép quay tâm A góc quay 60° theo một chiều xác định biến C thành B và do đó biến (d) thành (d') đi qua B. Rõ ràng B là giao điểm của (d') và (O).

- *Cách dựng:* Dựng (d') là ảnh của (d) trong phép quay $R_A(60°)$ (hoặc $R_A(-60°)$). Kí hiệu B là giao điểm của (d') và (O). Dựng C là ảnh của B trong phép quay $R_A(-60°)$ (hoặc $R_A(60°)$). Tam giác ABC là tam giác cần dựng.

- *Chứng minh:* Theo cách dựng thì C thuộc (d), vì ảnh của mọi điểm thuộc (d') trong phép quay $R_A(-60°)$ (hoặc $R_A(60°)$) thuộc (d).

- *Biện luận*: Bài toán có nghiệm khi (d') và (O) có điểm chung. Bài toán vô nghiệm khi (d') và (O) không có điểm chung. Nếu bài toán có nghiệm, thì có ít nhất là 1 và nhiều nhất là 4.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 8. Cho đường tròn (O) và điểm M không nằm trên đường tròn đó. Với mỗi điểm A thuộc (O) ta dựng điểm B sao cho tam giác MAB vuông cân tại M. Tìm tập hợp điểm B, khi A thay đổi trên (O).

Giải

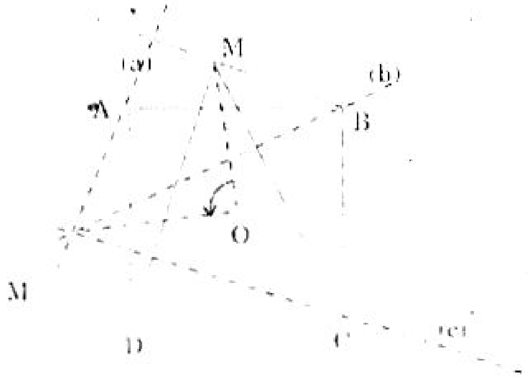
Rõ ràng B là ảnh của A trong phép quay $R_M(90^\circ)$ (hoặc $R_M(-90^\circ)$); do đó đường tròn (O) biến thành đường tròn (O') chứa B. Với mỗi điểm B thuộc (O') bằng phép quay $R_M(-90^\circ)$ (hoặc $R_M(90^\circ)$), ta nhận được điểm A thuộc (O) và tam giác MAB vuông cân tại M. Tóm lại tập hợp B là đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép quay $R_M(90^\circ)$ (hoặc $R_M(-90^\circ)$). Có hai đường tròn như vậy.

Khảo sát tính đồng quy của ba đường thẳng hoặc thẳng hàng của ba điểm

Ví dụ 9. Cho hình vuông ABCD và M là một điểm tùy ý. Ta kí hiệu (a) là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MB; (b) là đường thẳng đi qua B và vuông góc với MC; (c) là đường thẳng đi qua C và vuông góc với MD; (d) là đường thẳng đi qua D và vuông góc với MA. Chứng minh rằng 4 đường thẳng (a), (b), (c), (d) đồng quy.

Giải

Gọi O là tâm của hình vuông, thực hiện phép quay $R_O(90^\circ)$: $B \to A$, $M \to M' \Rightarrow BM \to AM'$ và ta có $BM \perp AM'$. Theo giả thiết (a) đi qua A và vuông góc với BM, vì vậy (a) chính là AM' hay $M' \in$ (a). Tương tự ta có M' thuộc đồng thời các đường thẳng (b), (c), (d).



Phép quay trong hệ trục chuẩn

Ví dụ 1. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và phép quay $R_O(90^\circ)$ (O là gốc tọa độ). Tìm ảnh của M trong phép quay đó.

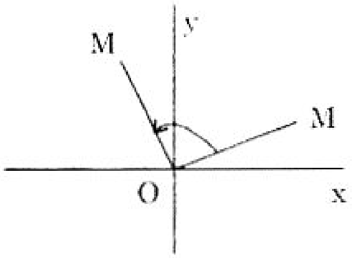
Giải

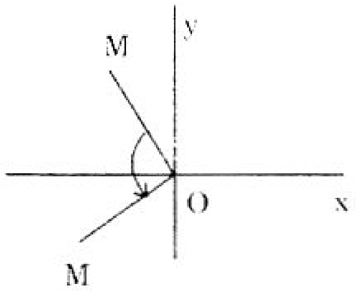
Kí hiệu M'(x; y) là ảnh của M trong phép quay $R_O(90^\circ)$; khi đó:

$$OM' = OM \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$$

và $$\overrightarrow{OM'} . \overrightarrow{OM} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0x + y_0y = 0.$$

Ta giải hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = x_o^2 + y_o^2 \\ x_o x + y_o y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y_o$ và $y = -x_o$ hoặc $x = -y_o$ và $y = x_o$





Một trong hai điểm $(y_o; -x_o)$; $(-y_o; x_o)$ là ảnh của M. Chẳng hạn nếu $x_o > 0$ và $y_o > 0$, thì điểm $(y_o; -x_o)$ là ảnh của M; nếu $x_o < 0$ và $y_o > 0$, thì điểm $(-y_o; x_o)$ là ảnh của M.

Ví dụ 2. Tìm ảnh của đường thẳng $y = 2x$ trong phép quay $R_o(45^\circ)$ (O là gốc tọa độ).

Giải

Đường thẳng $y = 2x$ đi qua gốc tọa độ O, vì vậy ta cần tìm ảnh của một điểm thuộc đường thẳng đó trong phép quay $R_o(45^\circ)$. Ta xét điểm $A(1; 2)$ và kí hiệu $A'(x; y)$ là ảnh của A. Từ tính chất của phép quay, ta có:

$$OA'^2 = OA^2 \text{ và } \widehat{AOA'} = 45^\circ \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \text{ và } \cos 45^\circ = \frac{x + 2y}{\sqrt{5(x^2 + y^2)}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \text{ và } |x + 2y| = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Bằng cách giải hệ phương trình đó ta được:

$$x = -\frac{5}{\sqrt{2}},\quad y = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ và } y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vì điểm A' thuộc góc tọa độ phần tư thứ hai, điểm $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ là thích hợp.

Đường thẳng OA' có phương trình $y = x + \sqrt{10}$.

53. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Tính các yếu tố hình học

1. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B và đặt AB = a, BC = b. Trên AB và BC về một phía với AC ta dựng các tam giác đều ABM và BCN.

i) Tính góc tạo bởi các đường thẳng CM và AN.

ii) Gọi I và K lần lượt là trung điểm các đoạn CM và AN. Tính khoảng cách IK.

Hướng dẫn: Thực hiện phép quay $R_B(60^0)$: C → N và M → A.

IK là cạnh của tam giác đều BIK.

2. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B và dựng các hình vuông ABMN và BCPQ nằm về một phía với AC.

i) Tính góc tạo bởi hai đường thẳng MC và AQ.

ii) Tính góc tạo bởi NP và AQ. iii) Tính các tỉ số $\frac{MC}{AQ}$ và $\frac{NP}{AQ}$.

Hướng dẫn:

i) Thực hiện phép quay $R_B(90^0)$: C → Q, M → A.

ii) Thực hiện phép quay $R_B(45^0)$: P → P'; N → N', khi đó: P'N' // AQ.

iii) $\frac{MC}{AQ} = 1$ và $\frac{NP}{AQ} = \sqrt{2}$.

3. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) có $\hat{A} = 20^0$. Trên cạnh AB ta lấy điểm M sao cho AM = BC. Tính góc $\widehat{BMC}$.

Hướng dẫn: Thực hiện phép quay $R_A(60^0)$: C → C', khi đó tam giác AMC' bằng tam giác ABC (cgc) vì vậy M thuộc cung tròn tâm C' bán kính C'A ⇒ $\widehat{ACM} = 10^0 \Rightarrow \widehat{BMC} = 30^0$.

4. Cho hình vuông ABCD cạnh AB = 1. Giả sử M và N là hai điểm lần lượt trên các cạnh BC và CD sao cho góc $\widehat{MAN} = 45^0$.

Tính tổng MN + NC + CM.

Hướng dẫn: Thực hiện phép quay $R_A(45^0)$: B → D, M → M', khi đó M' thuộc tia đối của tia DC và BM = DM'. Rõ ràng:

$$\Delta AMN = \Delta AM'N \Rightarrow NM' = NM \Rightarrow MN + NC + CM = 2.$$

5. Cho hình vuông ABCD cạnh AB = 1 và O là tâm của hình vuông. Phép quay $R_o(30^0)$ biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D'.

Tính diện tích phần chung của hai hình vuông đó.

Hướng dẫn: Phần chung của hai hình vuông là một bát giác và ta kí hiệu S là diện tích của bát giác. Gọi M là giao điểm của các cạnh AB và A'B', N là giao điểm của AB và B'C'. Rõ ràng góc nhọn tạo bởi AB và A'B' bằng 30^0.

Đặt MN = x và từ các hệ thức:

$$MA.MB = MA'.MB' \quad \text{và} \quad MA + MB = MA' + MB' \qquad (*)$$

$$NA.NB = NB'.NC' \quad \text{và} \quad NA + NB = NB' + NC' \qquad (**)$$

ta suy ra: $MA = MB' = x\cos30^0$, $NB = NB' = x\cos60^0$.

Vì $MA + MN + NB = 1 \Rightarrow x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$$S_{B'MN} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{12} \Rightarrow S = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

6. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = \sqrt{3}$ nội tiếp trong đường tròn tâm O. Phép quay $R_O(90^\circ)$ biến ABC thành tam giác A'B'C'. Tính diện tích phần chung của hai tam giác đó.

Hướng dẫn: Xem hướng dẫn bài 5.

Diện tích phần chung: $S = \dfrac{36\sqrt{3} + 9}{4(12 - 7\sqrt{3})}$.

7. Cho tam giác đều ABC có cạnh AB = a. Thực hiện phép quay $R_A(\alpha)$ $(0 < \alpha \le 30^\circ)$ biến ABC thành tam giác A'B'C'.

i) Tính diện tích phần chung của hai tam giác đó trong trường hợp $\alpha = 30^\circ$.

ii) Tính diện tích phần chung của hai tam giác đó theo a và α.

Chứng minh các tính chất hình học

1. ABCD và A'B'C'D' là hai hình vuông có tâm chung và được đánh số theo một chiều xác định. Chứng minh rằng: $AB' \perp BC'$.

Hướng dẫn: Gọi O là tâm chung của hai hình vuông. Thực hiện phép quay $R_O(90^\circ)$: $A \to B$, khi đó $B' \to C'$.

2. ABC và A'B'C' là hai tam giác đều có tâm chung và được đánh số theo một chiều xác định trong mặt phẳng. Chứng minh rằng góc nhọn tạo bởi AB' và BC' bằng 60°.

3. Tam giác ABC và A'B'C' cùng nội tiếp trong đường tròn O và thỏa mãn điều kiện: $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$, $CA \perp C'A'$.

Chứng minh rằng: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Hướng dẫn: Thực hiện phép quay $R_O(90^\circ)$: $A \to A_1$, $B \to B_1$; $C \to C_1$ khi đó $AB \to A_1B_1$, $BC \to B_1C_1$, $CA \to C_1A_1$ và ta có $AB \perp A_1B_1$, $BC \perp B_1C_1$, $AC \perp A_1C_1$. Rõ ràng $A_1B_1 \parallel A'B'$, $B_1C_1 \parallel BC$. Vì $A_1B_1C_1$ và A'B'C' cùng nội tiếp trong một đường tròn nên hai tam giác đó trùng nhau.

4. Cho hình vuông ABCD. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng AB và CD tương ứng tại các điểm M và N. Đường thẳng $(d') \perp (d)$ cắt các đường thẳng BC và AD tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng: MN = PQ.

Hướng dẫn: Gọi O là tâm hình vuông; thực hiện phép quay $R_O(90^\circ)$: $AB \to BC \Rightarrow M \to M' \in BC$; $CD \to DA \Rightarrow N \to N' \in DA$ và $M'N' \perp MN$

$\Rightarrow$ hoặc $M'N' \parallel PQ$ hoặc M'N' trùng PQ.

5. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn O và P là điểm thuộc đường tròn đó. Phép quay $R_P(\alpha)$: $ABC \to A_1B_1C_1$; phép quay $R_P(-\alpha)$: $ABC \to A_2B_2C_2$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Hướng dẫn: Phép quay $R_P(2\alpha)$: $\Delta A_2B_2C_2 \to \Delta A_1B_1C_1$

$\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_2B_2C_2 \Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$. Gọi Q là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đó. Q là điểm đồng quy của các đường thẳng A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1.

6. Trên 3 cạnh AB, BC, CA về phía ngoài tam giác ABC ta dựng 3 hình vuông với các tâm tương ứng là O_1, O_2, O_3.

Chứng minh rằng: $O_1O_3 \perp AO_2$ và $O_1O_3 = AO_2$.

7. Hai đoạn AB và A'B' bằng nhau. Phép quay R_M: $A \to A'$ và $B \to B'$. Phép quay R_N: $A \to B'$ và $B \to A'$. Gọi S là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng: $MS \perp NS$

Hướng dẫn: Các phép quay đều biến $S \to S'$ là trung điểm của A'B', vì vậy $\Delta MSN = \Delta MS'N$.

Mặt khác: $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} + \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'A'})} = 180^\circ$, do đó tứ giác MSNS' nội tiếp trong đường tròn.

8. Cho 3 đường tròn bằng nhau và cùng đi qua một điểm và đôi một cắt nhau lần thứ hai tại A, B, C. Chứng minh rằng tam giác ABC bằng tam giác có 3 đỉnh là tâm 3 đường tròn đó.

Hướng dẫn: Dùng kết quả của ví dụ 2 và chú ý rằng đường tròn (S) đi qua tâm của 3 đường tròn bằng một trong ba đường tròn đó.

9. Cho tứ giác lồi ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA và về phía ngoài tứ giác ta dựng các hình vuông. Chứng minh rằng các đoạn thẳng nối tâm của hai hình vuông không kề nhau vuông góc với nhau và bằng nhau.

10. Giả sử A, B là hai chất điểm chuyển động đều với vận tốc bằng nhau trên hai tia Ox và Oy theo chiều của các tia đó. Chất điểm A xuất phát từ vị trí A_1 thuộc Ox, chất điểm B xuất phát từ vị trí B_1 trên Oy và thời điểm xuất phát của chúng như nhau. Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định mà tại bất kì thời điểm nào khoảng cách từ đó đến hai chất điểm A và B bằng nhau.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ tồn tại phép quay biến Ox thành tia Oy và biến A thành B. Tâm quay đó là điểm phải tìm.

11. Cho hai đường tròn bằng nhau và các chất điểm A, B chuyển động trên mỗi đường tròn đó theo cùng một chiều với vận tốc góc bằng nhau. Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định mà tại bất kì thời điểm nào khoảng cách từ đó đến hai chất điểm A, B luôn bằng nhau.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ tồn tại phép quay biến A thành B và do đó biến đường tròn chứa A thành đường tròn chứa B. Tâm quay đó là điểm phải tìm.

12. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA và về phía ngoài tam giác ta dựng các tam giác đều ABC_1, BCA_1, ACB_1. Chứng minh rằng:

i) Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều đã dựng cùng đi qua một điểm.

ii) Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

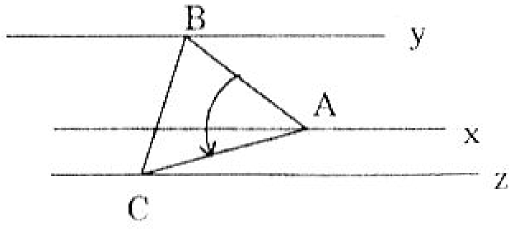
13. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA và về phía ngoài tam giác ta dựng các tam giác vuông cân ABC_1 ($C_1A = BA$), BCA_1 ($A_1C = A_1B$), ACB_1 ($B_1A = CA$). Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A, C_1C, B_1B đồng quy.

Hướng dẫn: Phép quay $R_A(90^\circ)$: $C_1 \to B$, $C \to B_1 \Rightarrow C_1C \to BB_1$ và $C_1C \perp BB_1$. Gọi M là giao điểm của C_1C và B_1B, khi đó $\widehat{AMB_1} = \widehat{BMA_1} = 45^\circ$ và do B_1, M, B thẳng hàng, nên ta suy ra A, M, A_1 cũng thẳng hàng.

Dựng hình

1. Cho 3 đường thẳng song song. Hãy dựng tam giác đều ABC sao cho 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó.

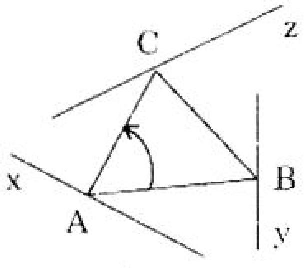
Hướng dẫn: Kí hiệu x, y, z là 3 đường thẳng đã cho; A, B, C là 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó. Phép quay $R_A(60^\circ)$ hoặc $R_A(-60^\circ)$ biến $B \to C \Rightarrow y \to y' \Rightarrow C$ là giao điểm của y' và z.



2. Cho 3 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hãy dựng tam giác đều ABC sao cho 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó.

Hướng dẫn: Kí hiệu x, y, z là 3 đường thẳng đã cho; A, B, C là 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó.

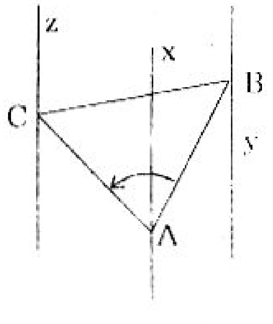
Phép quay $R_A(60^\circ)$ hoặc $R_A(-60^\circ)$ biến $B \to C \Rightarrow y \to y' \Rightarrow C$ là giao điểm của y' và z.



3. Cho 3 đường thẳng song song. Hãy dựng tam giác vuông cân ABC ($\hat{C} = 1v$) sao cho 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó .

Hướng dẫn: Kí hiệu x, y, z là 3 đường thẳng đã cho; A, B, C là 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó.

Phép quay $R_A(90^\circ)$ hoặc $R_A(-90^\circ)$ biến $B \to C \Rightarrow y \to y'$ $\Rightarrow C$ là giao điểm của y' và x.



4. Cho 3 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hãy dựng tam giác vuông cân ABC ($\hat{C}$ = 1v) sao cho 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 3.

5. Cho 3 đường thẳng đôi một cắt nhau. Hãy dựng tam giác cân ABC (AC = BC) có $\hat{C} = \alpha$, AB = c sao cho 3 đỉnh tam giác nằm trên 3 đường thẳng đó.

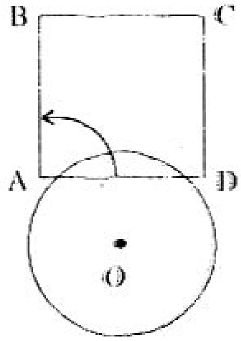
Hướng dẫn: Xem cách giải bài 3.

6. Cho hình vuông ABCD. Hãy dựng tam giác đều MNP có 3 đỉnh nằm trên 3 cạnh khác nhau của hình vuông.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 3.

7. Cho hai đường tròn đồng tâm có bán kính khác nhau. Hãy dựng hình vuông sao cho hai đỉnh liên tiếp của hình vuông thuộc đường tròn thứ nhất, hai đỉnh còn lại thuộc đường tròn thứ hai.

Hướng dẫn: Giả sử ABCD là hình vuông đã dựng có hai đỉnh A, B thuộc đường tròn thứ nhất, hai đỉnh còn lại thuộc đường tròn thứ hai. Phép quay $R_A(90^\circ)$: D → B do đó biến đường tròn chứa D → đường tròn chứa B và B là giao điểm của hai đường tròn.



8. Cho điểm O và hai đường thẳng (d), (d') không chứa O. Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh liên tiếp thuộc hai đường thẳng đã cho và nhận O là giao điểm các đường chéo.

9. Cho đường tròn (O), đường thẳng (d), điểm A không thuộc (O) và (d), góc nhọn α. Hãy dựng một hình thoi ABCD sao cho $\hat{A} = \alpha$, các đỉnh B và D lần lượt nằm trên (O) và (d).

10. Cho 3 đường tròn đồng tâm và bán kính khác nhau. Hãy dựng tam giác đều có 3 đỉnh nằm trên 3 đường tròn đó.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 7.

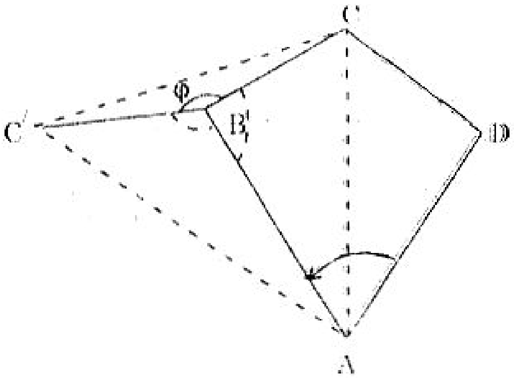
11. Cho 3 đường tròn không có hai đường tròn nào đồng tâm. Hãy dựng tam giác đều ABC sao cho mỗi đỉnh của tam giác thuộc một đường tròn đã cho.

12. Dựng tứ giác ABCD, biết AB = AD = a, BC = b, CD = c, $\hat{B} + \hat{D} = \alpha$.

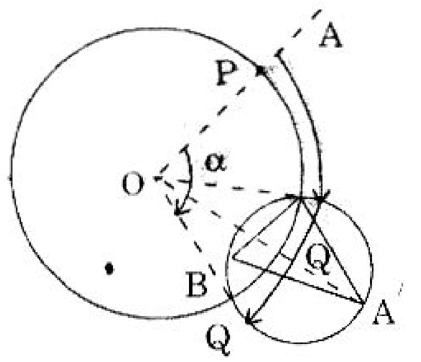
Hướng dẫn: Thực hiện phép quay R_A: D → B $\Rightarrow \Delta ADC \rightarrow \Delta ABC'$

$$\Rightarrow \widehat{CBC'} = 360^\circ - \alpha = \varphi.$$

Tam giác CBC' dựng được vì biết hai cạnh và góc xen giữa.

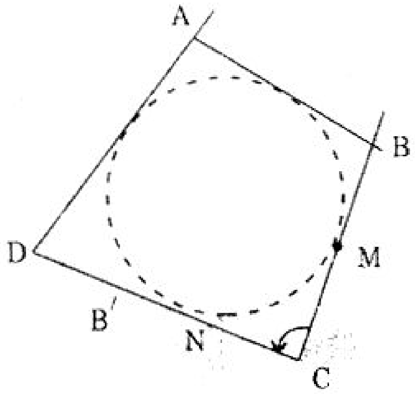


13. Cho đường tròn (O), hai điểm A, B không nằm trên (O) và góc α (0 < α < 180°). Hãy dựng các điểm P, Q thuộc (O) sao cho $\widehat{POQ} = \alpha$ và AB // BQ.



Hướng dẫn: Giả sử P và Q là các điểm đã dựng thỏa mãn các điều kiện đã cho. Thực hiện phép quay $R_0(\alpha)$: $P \to Q \Rightarrow A \to A'$ và đường thẳng PA tạo với đường thẳng QA' một góc xác định bằng β, trong đó $\beta = \alpha$ hoặc $\beta = 180^0 - \alpha$. Điểm Q vừa thuộc đường tròn (O) vừa thuộc cung chứa góc β dựng trên dây A'B, do đó Q là giao điểm của hai đường tròn đó, P là ảnh của Q trong phép quay $R_0(-\alpha)$.

14. Dựng tứ giác ABCD, biết $AB = a$, $AD = b$, $B = \alpha$, $D = \beta$ và tứ giác đó ngoại tiếp đường tròn.



Hướng dẫn: Giả sử ABCD là tứ giác đã dựng thỏa mãn các điều kiện đã nêu và xem $b > a$. Phép quay R_C: biến M thành N (M, N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tứ giác với các cạnh CB và CD) thì biến B thành $B' \in CD$, A thành A' và $A'B' = a$.

Từ điều kiện: $AB + CD = AD + BC$

$\Rightarrow CD - CB' = CD - CB = AD - AB = b - a$

$\Rightarrow B'D = b - a$. Ta dựng $\overrightarrow{B'A''} = \overrightarrow{DA}$, thì tam giác A'B'A'' xác định (c.g.c). Đỉnh C nằm trên DB' và đường trung trực của đoạn A'A.

15. Cho 3 đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$, $(O_3; R_3)$ có 3 tâm không thẳng hàng. Hãy dựng $\Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$ và có 3 đỉnh nằm trên 3 đường tròn đã cho.

16. Cho 4 tia Ox, Oy, Oz, Ot phân biệt. Hãy dựng hình bình hành có 4 đỉnh thuộc tia đã cho và có độ dài hai cạnh liên tiếp bằng a, b.

Tìm tập hợp điểm

1. Cho đường tròn (O) và điểm A không nằm trên đường tròn (O). Với mỗi điểm B thuộc (O) ta dựng tam giác vuông cân ABC ($\widehat{A} = 1v$). Tìm tập hợp đỉnh C, khi B thay đổi trên (O).

   ĐS: Là ảnh của (O) trong phép quay $R_A(90^0)$ hoặc $R_A(-90^0)$.

2. Cho đường thẳng (d), điểm A và góc α $(0 < \alpha < 180^0)$. Với mỗi điểm B thuộc (d) ta dựng tam giác cân ABC (AB = AC) sao cho $\widehat{A} = \alpha$. Tìm tập hợp đỉnh C.

   ĐS: Là ảnh của (d) trong phép quay $R_A(\alpha)$ hoặc $R_A(-\alpha)$.

3. Cho phép quay $R_0(\alpha)$ $(0 < |\alpha| < 180^0)$ và điểm S (khác tâm quay O). Tìm tập hợp điểm A sao cho ảnh A' của A trong phép quay đó nằm trên đường thẳng AS.

ĐS: Gọi S' là ảnh của S trong phép quay đó, (w) là đường tròn đi qua 3 điểm O, S, S'. Tập hợp A là (w).

4. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp điểm M trong tam giác sao cho:

$$MA^2 + MB^2 = MC^2.$$

ĐS: Là cung chứa góc 150° nằm trong tam giác.

Bài toán cực trị

1. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Hãy tìm trên hai cạnh góc các điểm A và B sao cho: OA = OB và MA + MB ngắn nhất.

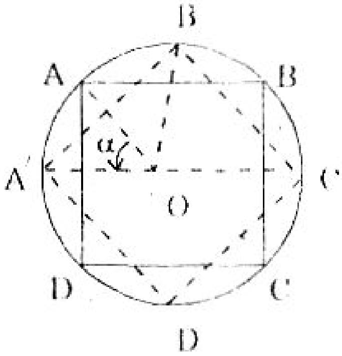
Hướng dẫn: Thực hiện phép quay biến A thành B, thì M biến thành M' và ta có: BM' = AM ⇒ MA + MB = BM + BM'. Ta tìm vị trí của B để BM + BM' nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC. Hãy tìm trong tam giác điểm M sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất.

Hướng dẫn: Xem ví dụ 6. M là giao điểm của CC_1 và BB_1, trong đó C_1 là đỉnh của tam giác đều ABC_1 nằm ngoài ABC, B_1 là đỉnh của tam giác đều ACB_1 nằm ngoài ABC. Bài toán chỉ có nghiệm khi $\widehat{ABC} < 120^\circ$.

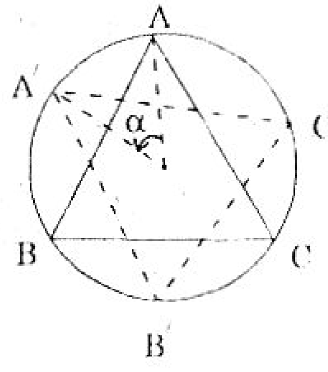
3. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha$. Phép quay $R_O(\alpha)$ và $R_O(-\alpha)$ biến nó thành các góc $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{x''Oy''}$. Hãy tìm giá trị bé nhất của α để 3 góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{x''Oy''}$ phủ kín mặt phẳng. Hãy giải bài toán đó trong trường hợp tâm quay là điểm khác O. (Các góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{x'Oy'}$ và $\widehat{x''Oy''}$ được gọi là phủ kín mặt phẳng, nếu mọi điểm M thuộc mặt phẳng bao giờ cũng có ít nhất một trong 3 góc chứa M).

4. Cho hình vuông ABCD có cạnh AB = a và O là giao điểm các đường chéo hình vuông. Phép quay $R_O(\alpha)$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$ biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D'. Xác định α để diện tích phần chung của hai hình vuông đó nhỏ nhất.



Hướng dẫn: Xem cách giải bài 5 *(phần tính các yếu tố hình học)* hãy biểu diễn diện tích phần chung của hai hình vuông theo α; $\alpha = 45^\circ$.

5. Cho tam giác đều ABC cạnh AB = 1 và O là tâm đường tròn ngoại tiếp nó. Phép quay $R_O(\alpha)$ $(0 < \alpha \le 90)$ biến ABC thành tam giác A'B'C'. Xác định α để diện tích phần chung của hai tam giác đó nhỏ nhất.



Hướng dẫn: Xem cách giải bài 4.

PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

54. TÓM LƯỢC LÝ THUYẾT VỀ PHÉP BIẾN ĐỔI VỊ TỰ

Định nghĩa

Cho điểm O và số thực $k \neq 0$, với mỗi điểm M ta dựng điểm M' sao cho: $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ (*). Khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép vị tự tâm O hệ số k, M được gọi là nghịch ảnh của M' và kí hiệu $H_O(k)$: M → M'. Phép biến đổi biến mọi điểm của mặt phẳng thỏa mãn (*) được gọi là phép vị tự.

Cho hình φ; tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc φ trong phép vị tự lập thành hình φ' được gọi là ảnh của φ trong phép vị tự đó. Hai hình φ và φ' gọi là vị tự, nếu có một phép tự vị biến hình này thành hình kia.

Tính chất

i) Nếu $k = 1$, thì $H_O(k)$ là phép đồng nhất. Nếu $k = -1$, thì $H_O(k)$ là phép đối xứng tâm: $H_O(k) = Z_O$. Nếu $k > 0$, thì $H_O(k)$ là phép vị tự dương, tâm vị tự O nằm ngoài đoạn MM'. Nếu $k < 0$, thì $H_O(k)$ là phép vị tự âm và O nằm trên đoạn MM'.

ii) Giả sử A', B' là ảnh của A, B trong phép vị tự $H_O(k)$, khi đó: $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$.

iii) Phép vị tự $H_O(k)$ biến đường thẳng thành đường thẳng hoặc trùng hoặc song song với đường thẳng ban đầu; biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác ban đầu, góc thành góc và hai góc bằng nhau, đường tròn thành đường tròn.

iiii) Phép vị tự $H_O(k)$ có ngược, tức là phép vị tự $H_O\left(\frac{1}{k}\right)$.

55. DÙNG PHÉP VỊ TỰ ĐỂ GIẢI TOÁN

Tính các yếu tố hình học

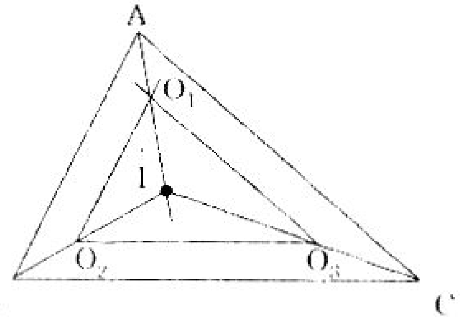
Ví dụ 1: Giả sử bên trong tam giác ABC người ta đặt được 4 đường tròn bằng nhau (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) sao cho 3 đường tròn đầu tiên tiếp xúc với hai cạnh tam giác và tiếp xúc với (O_4), biết bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác bằng R và r. Tính bán kính các đường tròn đó.

Giải

Ta kí hiệu O và I là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Theo giả thiết IA, IB, IC đi qua tâm O_1, O_2, O_3 và O_1O_2 // AB, O_2O_3 // BC,

O_3O_1 // CA. Như vậy phép vị tự $H_I(k)$: A → O_1 ⇒ B → O_2 và C → O_3 ⇒ $\Delta ABC \to \Delta O_1O_2O_3$ và do đó đường tròn (O) → (O_4) (O_4 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$). Kí hiệu x là bán kính của (O_4), khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ bằng 2x, khoảng cách từ O_2O_3 đến BC bằng x.

Ta có:



$$\frac{O_2O_3}{BC} = \frac{r - x}{r} \quad \text{và} \quad \frac{O_2O_3}{BC} = \frac{2x}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r - x}{r} = \frac{2x}{R} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{rR}{R + 2r}$$

Chứng minh các tích chất hình học

Ví dụ 2: Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M và N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD và BC; AC và BD. Chứng minh rằng đường thẳng MN đi qua trung điểm hai đáy hình thang.

Giải

Gọi E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, đặt AB = a, CD = b.

Phép vị tự $H_M\left(\frac{b}{a}\right)$: D → A ⇒ C → B và F → E.

Do đó 3 điểm M, E, F thẳng hàng.

Phép vị tự $HN\left(-\frac{b}{a}\right)$: A → C ⇒ B → D và E → F.

Do đó 3 điểm N, E, F thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tứ giác ABCD và G là trọng tâm tứ giác. Chứng minh rằng tồn tại một phép vị tự tâm G biến tứ giác ABCD thành tứ giác A'B'C'D' có các đỉnh là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

Giải

Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GA} = -(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \qquad (*)$$

Mặt khác; A' là trọng tâm tam giác BCD,

$$\text{nên} \quad 3\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \qquad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $3\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}$ hay $H_G(-\frac{1}{3})$: A → A'.

Đó là điều cần chứng minh.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 4: Cho đường tròn (O; R), điểm A cố định thuộc đường tròn và số $k > 0$. Tìm tập hợp điểm M sao cho từ đó kẻ tới đường tròn tiếp tuyến MT (T là tiếp điểm) sao cho: $MT = kMA$.

Giải

Ta kí hiệu A' là điểm chung thứ hai của MA và (O; R), khi đó:

$$MA.MA' = MT^2 \quad \Leftrightarrow \quad MA.MA' = k^2.MA^2$$

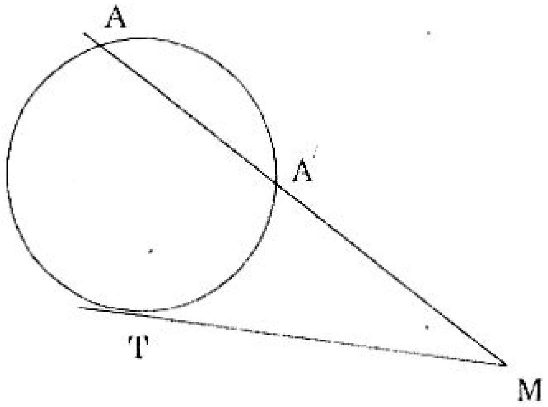
$$\Leftrightarrow \quad MA' = k^2MA \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA'} = k^2\,\overrightarrow{MA}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} = k^2\,\overrightarrow{MA} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AA'} = (1 - k^2)\,\overrightarrow{AM} \qquad (*)$$

Từ (*) ta suy ra:

- Nếu $k = 1$, thì A' và A trùng nhau và MA là tiếp tuyến của đường tròn.

- Nếu $k \neq 1$, thì $AM = \dfrac{1}{1 - k^2}.AA'$ và M là ảnh của A' trong phép vị tự $H_A\left(\dfrac{1}{1 - k^2}\right)$.



Điều đó chứng tỏ M thuộc đường tròn (O') vị tự với (O).

- Đảo lại:

- Nếu $k = 1$ và M là điểm bất kì thuộc tiếp tuyến của (O; R) tại A, thì $MT = MA' = kMA$.

- Nếu $k \neq 1$ và $M \in O'$, thì ta xác định A' là ảnh của M trong phép vị tự: $H_A(1 - k^2)$.

Phép vị tự $H_A(1 - k^2)$ biến đường tròn (O') thành (O; R) và do đó A' thuộc (O).

- Tóm lại:

- Nếu $k = 1$, thì tập M là tiếp tuyến của (O; R) tại A.

- Nếu $k \neq 1$, thì tập M là đường tròn vị tự với (O; R).

Dựng hình

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có các góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ nhọn. Hãy dựng một hình vuông nội tiếp trong tam giác sao cho hai đỉnh liên tiếp của hình vuông nằm trên cạnh BC, hai đỉnh còn lại nằm trên các cạnh AB và AC.

Giải

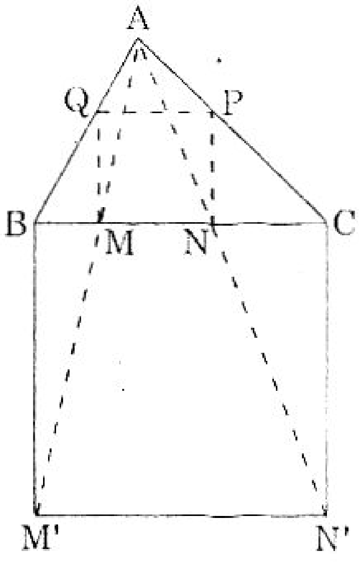
Giả sử MNPQ là hình vuông đã dựng, trong đó M, N thuộc BC, $P \in AC$ và

$Q \in AB$. Thực hiện phép vị tự $H_A(k)\left(k = \dfrac{AB}{AQ}\right)$: $Q \to B$, $P \to C$ và do đó biến: $M \to M'$, $N \to N'$.

Tứ giác $BCN'M'$ vị tự với hình vuông $MNPQ$, nên nó là một hình vuông.

- *Cách dựng:* Trên cạnh BC và về phía ngoài tam giác ta dựng hình vuông $BCN'M'$. Dựng các giao điểm M và N của BC và các đường thẳng AM', AN'. Từ M và N ta dựng các đường thẳng vuông góc với BC, chúng cắt AB và AC tương ứng tại Q và P.

- *Biện luận:* vì các góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ nhọn, nên bài toán luôn có nghiệm và nghiệm đó là duy nhất.



56. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

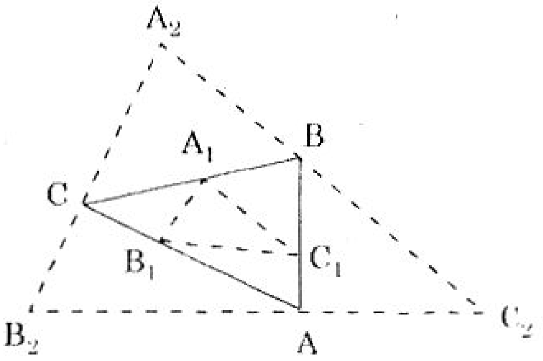
Tính các yếu tố hình học

1. Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O; R) và ngoại tiếp đường tròn (I; r). Giả sử bên trong tứ giác tồn tại 5 đường tròn bằng nhau sao cho 4 đường tròn đầu mỗi đường tròn tiếp xúc với hai cạnh tứ giác và tiếp xúc với đường tròn thứ 5. Hãy tính bán kính của một trong 5 đường tròn đó theo R và r.

   Hướng dẫn: Xem cách giải ở ví dụ 1. Kí hiệu x là bán kính của một trong 5 đường tròn, thì $x = \dfrac{rR}{R + 2r}$.

2. Hai tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ có diện tích tương ứng là S_1, S_2 và $A_1B_1 // A_2B_2$, $B_1C_1 // B_2C_2$, $C_1A_1 // C_2A_2$. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh nằm trên 3 cạnh tam giác ABC. Tam giác $A_2B_2C_2$ có 3 cạnh chứa 3 đỉnh tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC.

   Hướng dẫn: Gọi O là giao điểm của A_1A_2 và B_1B_2, phép vị tự tâm O biến $A_1 \to A_2$, biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A_2B_2C_2$. Ta kí hiệu k là hệ số vị tự, theo giả thiết $k > 0$. S là diện tích tam giác ABC



$$S = S_1 + S_{A_1B_1C} + S_{B_1C_1A} + S_{A_1C_1B} \quad \text{(xem hình)}$$

Ta có: $S_{AB_1C_1} = (k-1)S_{OB_1C_1}$, $\quad S_{BA_1C_1} = (k-1)S_{OA_1C_1}$,

$$S_{CB_1A_1} = (k-1)S_{A_1B_1C_1}$$

$$\Rightarrow \quad S_{AB_1C_1} + S_{BA_1C_1} + S_{CB_1A_1} = (k-1)S_1$$

$$\Rightarrow \quad S = S_1 + (k-1)S_1 = kS_1.$$

Mặt khác: $S_2 = k^2 S_1 \Rightarrow S^2 = k^2.S_1^2 = S_1.S_2 \Rightarrow S = \sqrt{S_1.S_2}$.

3. Tứ giác ABCD có diện tích S. Tính diện tích tứ giác có 4 đỉnh là 4 trọng tâm của 4 tam giác: ABC, BCD, CDA, DAB.

Hướng dẫn: Kí hiệu S' là diện tích tứ giác có đỉnh là trọng tâm 4 tam giác đã nêu trong bài toán. Theo kết quả đã biết trong ví dụ 3, thì $S' = \frac{S}{9}$.

4. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) (R > r) có khoảng cách giữa hai tâm bằng d (d > R + r). Kí hiệu S là giao điểm hai tiếp tuyến chung ngoài và S' là giao điểm các tiếp tuyến chung trong của chúng. Tính khoảng cách từ S đến S'.

ĐS: $SS' = \frac{2drR}{R^2 - r^2}$.

5. Tam giác ABC có BC = a, AB = c, AC = b. Gọi (w) là đường tròn đi qua trung điểm 3 cạnh tam giác ABC. A'B'C' là tam giác có 3 cạnh song song với 3 cạnh tam giác ABC và ngoại tiếp (w). Tính diện tích tam giác A'B'C'.

ĐS: $S_{A'B'C'} = k^2.S_{ABC}$, $k = \frac{r'}{r}$; trong đó r' là bán kính của (w), r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad 2p = a + b + c.$$

6. Tam giác ABC có diện tích S. Thực hiện phép vị tự $H_G(-2)$ (G là trọng tâm tam giác) biến ABC thành tam giác A'B'C'. Tính diện tích A'B'C'.

ĐS: 4S.

Chứng minh các tính chất hình học

1. Cho hình bình hành ABCD và điểm O nằm trong hình bình hành đó. Đường thẳng qua O, song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại P và Q. Đường thẳng qua O, song song với AD cắt AB và CD lần lượt tại M và N.

i) Chứng minh rằng các hình bình hành ONDP và OMBQ vị tự với nhau, khi và chỉ khi O nằm trên đường chéo BD của ABCD.

ii) Kí hiệu S_1 và S_2 lần lượt là diện tích các hình bình hành OMAP và ONCQ. Chứng minh rằng: $O \in BD \Leftrightarrow S_1 = S_2$.

Hướng dẫn: ii) Theo kết quả i) ta suy ra:

$$\frac{OM}{ON} = \frac{OQ}{OP} \quad \Leftrightarrow \quad OM.OP = ON.OQ \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = S_2.$$

2. Giả sử bên trong tam giác ABC người ta đặt được 4 đường tròn bằng nhau (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) sao cho 3 đường tròn đầu tiên tiếp xúc với hai cạnh tam giác và tiếp xúc với (O_4). Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC và tâm của đường tròn (O_4) thẳng hàng.

Hướng dẫn: Xem cách giải trong ví dụ 1.

3. Cho tam giác ABC và đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại M. Gọi N là giao điểm thứ hai của IM và đường tròn (I), K là giao điểm của AN và BC.

i) Chứng minh rằng phép vị tự H_A biến N thành K, thì biến đường tròn (I) thành đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC.

ii) Chứng minh rằng: BM = CK.

iii) Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: IE // NK.

iv) Kí hiệu H và F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc $\hat{B}$ và $\hat{C}$ của tam giác ABC thuộc các cạnh AC và AB. P là giao điểm của BH và CF. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác MNK, tâm đường tròn (I) và điểm P thẳng hàng.

4. Kí hiệu R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $R \geq 2r$.

Hướng dẫn: Xem lại bài 5 (trong phần *tính các yếu tố hình học*).

Từ $S_{A'B'C'} = k^2.S_{ABC}$, $k = \frac{r'}{r}$; trong đó r' là bán kính của (w), r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, $S_{A'B'C'} > S_{ABC}$, suy ra r' > r. Mặt khác: 2r' = R.

5. Trên các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC ta lấy các điểm tương ứng A_1, B_1, C_1 sao cho: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = k$.

Trên các cạnh A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 ta lấy lần lượt các điểm C_2, B_2, A_2 sao cho: $\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{1}{k}$.

Chứng minh rằng hai tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ vị tự.

Hướng dẫn: Hãy chứng tỏ A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng đi qua trọng tâm tam giác ABC.

6. Cho phép vị tự $H_O(k)$ $(k \neq 0; 1)$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ $(U \neq 0)$. Chứng minh rằng các phép biến đổi $T_{\vec{U}}.H_O(k)$ và $H_O(k).T_{\vec{U}}$ là là phép vị tự.

Hướng dẫn: Đặt $H = T_{\vec{U}}.H_O(k)$, ta chứng tỏ rằng H có điểm bất động.

Thật vậy giả sử S là điểm bất động của H, khi đó:

$$H_o(k): S \to S' \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OS'} = k.\overrightarrow{OS} \qquad (1)$$

$$T_{\vec{U}}: S' \to S \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{S'S} = \vec{U} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{1-k}\vec{U}$ và hệ thức này chứng tỏ S tồn tại và duy nhất. Bây giờ ta chứng minh H là phép vị tự.

Giả sử A ≠ S, khi đó: $H_o(k): S \to S', A \to A' \Rightarrow \overrightarrow{S'A'} = k.\overrightarrow{SA}$;

$$T_{\vec{U}}: S' \to S, A' \to A'' \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{SA''} = \overrightarrow{S'A'} = k.\overrightarrow{SA}$$

và đây là điều cần chứng minh. Hệ thức còn lại chứng minh tương tự.

Dùng kết quả bài 6 để giải các bài 7 và 8 dưới đây:

7. Phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ $(\vec{U} \neq \vec{0})$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'. Gọi A_o, B_o, C_o lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng A_oA', B_oB', C_oC' đồng quy.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và đặt $H = T_{\vec{U}}.H_G(-2)$.

Rõ ràng H: $A_oB_oC_o \to A'B'C'$.

8. Cho tứ giác ABCD và các điểm A_o, B_o, C_o, D_o là trọng tâm các tam giác tương ứng BCD, CDA, DAB và ABC. Phép tịnh tiến $T_{\vec{U}}$ $(\vec{U} \neq \vec{0})$ biến tứ giác ABCD thành tứ giác A'B'C'D'. Chứng minh rằng: A_oA', B_oB', C_oC', D_oD' đồng quy.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tứ giác ABCD và đặt $H = T_{\vec{U}}.H_G(-3)$.

Rõ ràng H: $A_oB_oC_oD_o \to A'B'C'D'$.

9. Cho hai phép vị tự $H_O(k)$ và $H_{O'}(k')$ (O và O' khác nhau (k ≠ 0; 1, k' ≠ 0; 1, k.k' ≠ 0; 1), khi đó phép biến đổi $H_O(k).H_{O'}(k')$ hoặc $H_{O'}(k').H_O(k)$ là phép vị tự.

Hướng dẫn: Đặt $H = H_{O'}(k').H_O(k)$, trước hết ta chứng tỏ H có điểm bất động. Giả sử S là điểm bất động của H, khi đó ta có

$$H_O(k): S \to S', H_{O'}(k'): S' \to S \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OS'} = k.\overrightarrow{OS} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{O'S} = k'.\overrightarrow{O'S'}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OS} = \frac{k'-1}{kk'-1}OO' \qquad (*)$$

Hệ thức (*) chứng tỏ S là điểm bất động của H. Bây giờ ta chỉ ra rằng H là phép vị tự.

Giả sử $A \neq S$, $H_O(k): A \to A'$, $H_{O'}(k'): A' \to A''$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OS'} = k\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{O'A''} = k'\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'S} = k'\overrightarrow{O'S'}$

Kết hợp các kết quả đó cho ta $\overrightarrow{SA''} = k.k'.\overrightarrow{SA}$. Hệ thức còn lại chứng minh tương tự.

Dùng kết quả bài 9 để giải các bài 10, 11, 12 dưới đây:

10. Cho 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) nằm ngoài nhau và có bán kính khác nhau. Chứng minh rằng giao điểm của các cặp tiếp tuyến chung ngoài của các cặp đường tròn nằm trên cùng một đường thẳng.

Hãy giải bài toán tương tự trong trường hợp giao điểm của hai cặp tiếp tuyến chung trong và một cặp tiếp tuyến chung ngoài.

Hướng dẫn: Kí hiệu R_1, R_2, R_3 là bán kính các đường tròn tương ứng; S_1, S_2, S_3 là giao điểm các cặp tiếp tuyến chung ngoài của chúng. Rõ ràng:

$$H_{S_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right): (O_1) \to (O_2), \qquad H_{S_2}\left(\frac{R_3}{R_2}\right): (O_2) \to (O_3),$$

$$H_{S_3}\left(\frac{R_1}{R_3}\right): (O_3) \to (O_1)$$

Do đó: $H_{S_3}\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = H_{S_2}\left(\frac{R_3}{R_2}\right).H_{S_1}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ $\Rightarrow$ Tâm vị tự của các phép vị tự đó thẳng hàng.

11. Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ nằm ngoài nhau. Giả sử đường tròn (O) tiếp xúc ngoài với (O_1) tại A và tiếp xúc ngoài với (O_2) tại B; M là một điểm bất kì thuộc (O), thì đường thẳng PQ hoặc đi qua một điểm cố định hoặc song song với một đường thẳng cố định.

12. Cho hình bình hành ABCD và đường thẳng (d) // AB cắt các cạnh AD, BC tương ứng tại các điểm P, Q. Trên đường thẳng PQ ta lấy các điểm E và F, trên đường thẳng CD ta lấy các điểm M, N và giả sử AM cắt BN tại S, AE và BF cắt nhau tại T, ME và NF cắt nhau tại R. Chứng minh rằng: 3 điểm S, T, R thẳng hàng.

13. Cho tứ giác lồi ABCD. Giả sử AB và CD cắt nhau tại M, AD và BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng các trung điểm của đoạn MN và hai đường chéo tứ giác thẳng hàng.

Hướng dẫn: Hãy dùng kết quả ii) bài 1 trong phần *chứng minh các tính chất hình học.*

14. Ta kí hiệu A_0, B_0, C_0 là giao điểm của đường tròn (O) và các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Trên các tia OA_0, OB_0, OC_0 ta lấy lần lượt các điểm L, M, K sao cho OL = OM = OK. Chứng minh rằng các đường thẳng AL, BM, CK đồng quy.

15. Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau và điểm M nằm trên đường tròn (O). Trên đường tròn (O') ta lấy điểm M' sao cho O'M' // OM và M, M' cùng phía với OO'. Chứng minh rằng đường thẳng MM' luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi. Trường hợp M, M' nằm khác phía với OO', thì kết luận trên còn đúng không?

Hướng dẫn: MM' đi qua tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. Trường hợp M, M' nằm khác phía với OO', thì MM' đi qua tâm vị tự trong của hai đường tròn.

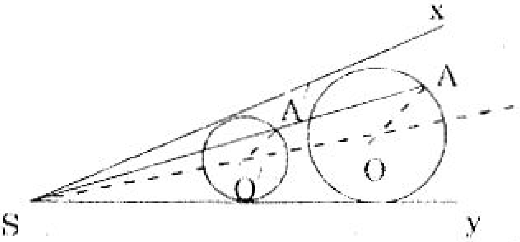
16. Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn, thì 4 trọng tâm của 4 tam giác: ABC, BCD, CDA và DAB cùng nằm trên một đường tròn.

Hướng dẫn: Xem lại ví dụ 3.

17. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') có tâm không trùng nhau. Giả sử S là tâm vị tự ngoài của (O; R) và (O'; R'), tức là $\overrightarrow{SO} = \frac{R}{R'}.\overrightarrow{SO'}$, S' là tâm vị tự trong của chúng, tức là $\overrightarrow{S'O} = -\frac{R}{R'}.\overrightarrow{S'O'}$. Chứng minh rằng S và S' chia điều hòa đoạn OO'.

Dựng hình

1. Cho hai đường thẳng x, y và điểm A không nằm trên các đường thẳng đó. Hãy dựng đường tròn đi qua A và tiếp xúc đồng thời với x và y.



Hướng dẫn: Trường hợp x // y; tâm w của đường tròn qua A, tiếp xúc với x và y là giao điểm của đường tròn (A; l) và đường thẳng z // x // y và z cách đều x, y ($2l$ là khoảng cách từ x đến y).

Trường hợp x và y cắt nhau tại S. Nếu ta dựng đường tròn (O) tiếp xúc với x và y và nằm trong miền góc tạo bởi x và y chứa đường tròn (w), thì (w) và (O) vị tự, tâm của phép vị tự đó là S (xem hình trên).

2. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó.

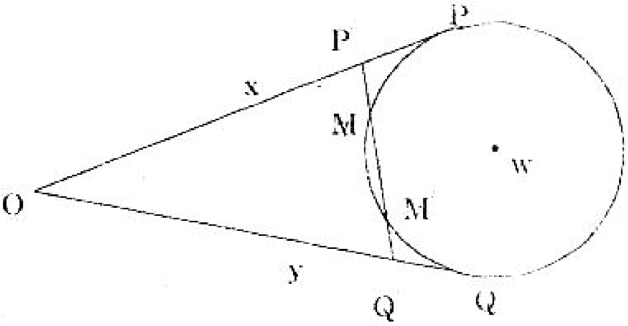
i) Hãy dựng đường tròn có bán kính lớn nhất đi qua M và tiếp xúc đồng thời với hai cạnh của góc.

ii) Hãy dựng đường thẳng đi qua M và cắt góc $\widehat{xOy}$ thành tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

i) Là trường hợp riêng của bài 1 (phần *dựng hình*).

ii) Ta kí hiệu P và Q là tiếp điểm của đường tròn (w) có bán kính lớn nhất tiếp xúc với hai cạnh góc $\widehat{xOy}$ và đi qua M. Đường thẳng bất kì đi qua M cắt (w) lần thứ hai tại M' và hai cạnh góc tại P' và Q' (xem hình trên).



Cung nhỏ nhất $\overset{\frown}{MM'}$ của (w) nằm trong tam giác OP'Q'. Ta dựng một tiếp tuyến của cung nhỏ $\overset{\frown}{MM'}$ và song song với P'Q', tiếp tuyến đó cắt hai cạnh góc tại A và B.

$$\Delta OAB \sim \Delta OP'Q' \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{OAB}}{p_{OP'Q'}} = \left(\frac{OA}{OP'}\right) \le 1$$

$$\Rightarrow \quad p_{OAB} \le p_{OP'Q'} \quad (p_{OAB} \text{ là chu vi tam giác OAB})$$

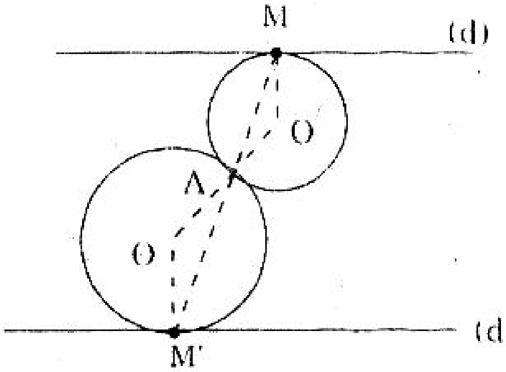
$$\Rightarrow \quad p_{OAB} = 2OP \le p_{OP'Q'} \quad (\text{OP không đổi})$$

Dấu "=" xảy ra khi P'Q' tiếp xúc với (w) tại M.

3. Cho đường thẳng (d), đường tròn (O) và điểm A thuộc đường tròn. Hãy dựng đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại A và tiếp xúc với (d).

Hướng dẫn: Giả sử (O') tiếp xúc với (d) tại điểm M.

Thực hiện phép vị tự H_A biến đường tròn (O') thành (O), khi đó: M → M', (d) → (d') tiếp xúc với (O) tại M' và (d') // (d). Các điểm M', A, M thẳng hàng. Tâm O' là giao điểm của OA và đường trung trực của AM.



Bài toán luôn có hai nghiệm.

4. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Hãy dựng đường thẳng (d) đi qua M cắt (O) tại hai điểm A, B sao cho A là trung điểm của MB.

Hướng dẫn: Ta cần dựng một trong hai giao điểm của (d) và (O). Phép vị tự $H_M\left(\frac{1}{2}\right)$: B → A, do đó biến (O) thành (O') đi qua A; A là điểm chung của hai đường tròn (O) và (O'); (d) là đường thẳng qua A và M.

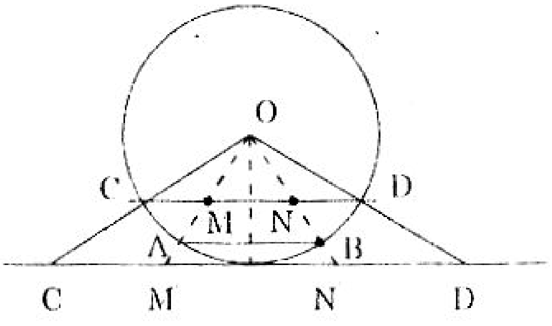
5. Cho tam giác ABC. Hãy dựng một đường thẳng (d) // BC và cắt tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn: Nếu (d) cắt AB và AC lần lượt tại M và N, thì

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \quad \text{và} \quad \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2.$$

6. Cho đường tròn (O) và dây cung AB (khác đường kính). Hãy dựng dây cung CD sao cho CD bị chia thành 3 phần bằng nhau bởi hai bán kính OA và OB.

Hướng dẫn: Giả sử M, N là giao điểm của CD và các bán kính OA, OB ($M \in NC$). Vì $\Delta OMC = \Delta OND$, nên OM = ON và CD // AB. Dựng đường thẳng (d) tiếp xúc với O và (d) // AB. Gọi C' là giao điểm của OC và (d), phép vị tự $H_O(k)$: C → C', thì $H_O(k)$ biến M → M', N → N', D → D' và C'M' = M'N' = N'D'.



• *Cách dựng:* Dựng các điểm M', N' là giao của OA, OB và (d) ((d) tiếp xúc với (O) và song song với AB).

7. Cho đường tròn (O) và dây cung AB (khác đường kính). Hãy dựng hình vuông MNPQ nội tiếp trong hình viên phân được giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của (O) sao cho hai đỉnh liên tiếp M, N thuộc dây AB, hai đỉnh còn lại thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$.

8. Dựng tam giác ABC, biết góc $\hat{A} = \alpha$, đường cao h_a, $\frac{b}{c} = k$.

Hướng dẫn: Dựng tam giác A'B'C', biết $\hat{A} = \alpha$, AB' = 1, AC' = k.

Hạ AH' ⊥ B'C', dựng $H \in AH'$ và $AH = h_a$. Dựng đường thẳng (d) ⊥ AH tại H. Giao điểm của (d) và AB', AC' là hai đỉnh tam giác cần dựng.

9. Dựng tam giác ABC, biết góc $\hat{A} = \alpha$, cạnh a, $\frac{b}{c} = k$.

Hướng dẫn: Xem cách dựng bài 8.

10. Dựng tam giác ABC, biết góc $\hat{A} = \alpha$, cạnh a, $\frac{h_b}{b} = k$.

Hướng dẫn: Dựng tam giác AB'C', biết $\hat{A} = \alpha$, AC' = 1 và đường cao B'E = k. Các đỉnh B, C là ảnh của B' và C' trong phép vị tự $H_A\left(\frac{k}{h_b}\right)$.

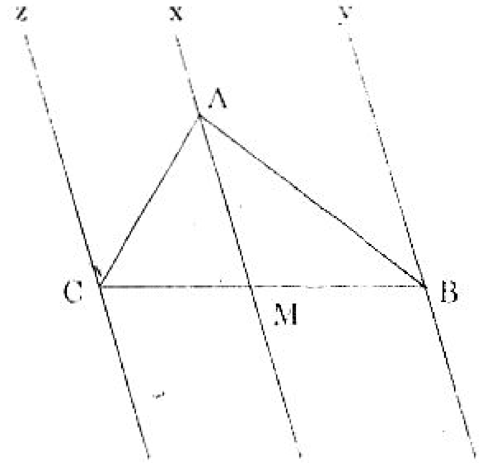
11. Dựng tam giác ABC, biết góc $\hat{A} = \alpha$, đường cao h_c, $\frac{a}{c} = k$.

Hướng dẫn: Xem cách dựng bài 10.

12. Dựng tam giác ABC, biết góc $\hat{A} = \alpha$, góc $\hat{B} = \beta$, a + b = 1.

13. Cho tam giác ABC và một phương (d). Hãy dựng một đường thẳng (d') // (d) và cắt tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

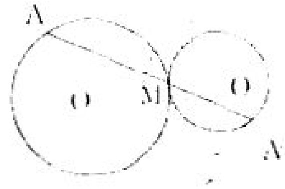
Hướng dẫn: Nếu (d) // BC, thì xem các giải bài 5 trong *phần dựng hình*. Giả sử (d) không song song với các cạnh tam giác. Ta dựng đường thẳng x, y, z lần lượt qua A, B, C và song song với (d). Có thể x sẽ cắt cạnh BC tại M. Tam giác ABC được chia thành hai tam giác AMB và AMC và ta xem tam giác AMB có diện tích lớn hơn diện tích tam giác AMC. Vấn đề đặt ra là cần dựng đường thẳng (d') // x và cắt tam giác ABM thành hai phần sao cho một trong hai phần đó là tam giác có diện tích bằng nửa diện tích tam giác ABC.



Tìm tập hợp điểm

1. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') tiếp xúc với nhau tại M và số thực $k \neq 0$. Một đường thẳng (d) đi qua M cắt đường tròn (O, R) tại A và đường tròn (O'; R') tại A'. Tìm tập hợp điểm $P \in (d)$ sao cho: $\overrightarrow{PA} = k\,\overrightarrow{PA'}$.

Hướng dẫn:



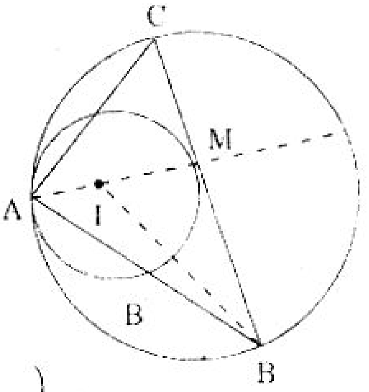
- Trường hợp $k = 1$, thì $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PA'} \Leftrightarrow A = A' = M$ và tập hợp P là tiếp tuyến của hai đường tròn tại M.
- Trường hợp $k \neq 1$ thì $\overrightarrow{PA} = k\,\overrightarrow{PA'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MA'}) = k\,\overrightarrow{PM} + k\,\overrightarrow{MA'} = k\,\overrightarrow{PM} + k\lambda.\overrightarrow{MA}$. λ là hệ số vị tự của phép vị tự tâm M biến A thành A'. Vậy ta có: $\overrightarrow{MP} = \gamma.\overrightarrow{MA}$,

trong đó: $\gamma = \dfrac{k\lambda - 1}{k - 1}$.

2. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') ($R > R'$) tiếp xúc trong với nhau tại A. Tiếp tuyến của đường tròn (O'; R') cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm B, C. Tìm tập hợp tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, khi tiếp tuyến đó biến thiên. Hãy giải bài toán đó trong trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài.

Hướng dẫn: Kí hiệu M là tiếp điểm của BC và (O'), rõ ràng AM là phân giác góc $\widehat{BAC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta cần chứng minh rằng, phép vị tự $H_A(k)$ biến M thành I, trong đó hệ số $k = \dfrac{\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{R - R'}}$



Ta kí hiệu B' là giao điểm của AB và (O'), khi đó:

$$BM^2 = BB'.BA = (BA - AB')BA = BA^2 - AB'.BA$$

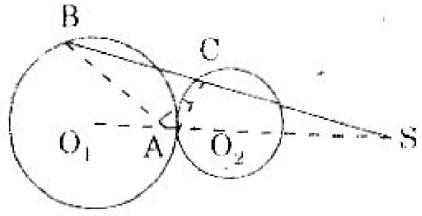
$$= BA^2\left(1 - \frac{R'}{R}\right)$$

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AB}{AB + BM} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{R - R'}} \Rightarrow H_A\left(\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{R - R'}}\right): M \to I.$$

M chạy trên đường tròn (O'), do đó I chạy trên đường tròn (w) là ảnh của (O') trong phép vị tự đó.

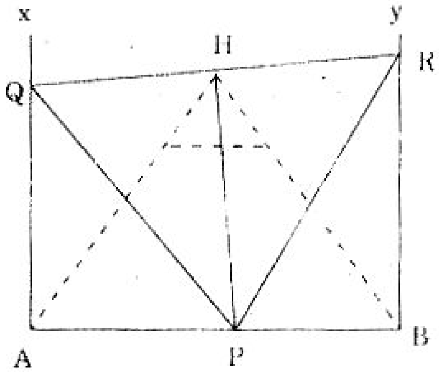
3. Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^0$) có đỉnh A cố định, các đỉnh B, C di động trên hai đường tròn cố định (O_1) và (O_2) (có bán kính khác nhau) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Tìm tập hợp chân đường cao H hạ từ A xuống BC.

Hướng dẫn: Kí hiệu B' và C' lần lượt là giao điểm của AB và (O_2); AC và (O_1). Bằng cách vẽ thêm tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) tại A, ta chứng minh được các đường kính BC' // CB'. Gọi S là giao điểm của BC và B'C'. S là tâm của phép vị tự biến (O_1) thành (O_2); H nhìn AS cố định dưới một góc vuông.



4. Cho đoạn AB và hai nửa đường thẳng Ax, By cùng vuông góc với AB và nằm về một phía đối với đường thẳng AB. Xét tất cả các tam giác đều PQR có đỉnh P ∈ AB, Q ∈ Ax, R ∈ By. Tìm tập hợp trọng tâm tam giác PQR.

Hướng dẫn: Gọi G là trọng tâm tam giác PQR, H là giao điểm của PG và QR. Vì PH ⊥ QR, nên các tứ giác APHQ và BPHR nội tiếp trong đường tròn và vì vậy tam giác AHB đều ⇒ H cố định. Rõ ràng G là ảnh của P trong phép vị tự $H_G\left(\frac{1}{3}\right)$ ⇒ tập G là một đoạn thẳng song song với AB.



5. Cho hình vuông ABCD. Xét tất cả các tam giác đều PQR có 3 đỉnh nằm trên 3 cạnh hình vuông. Tìm tập hợp trọng tâm các tam giác đều đó.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 4.

6. Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định nằm trong đường tròn đó ($M \neq 0$). Xét các dây cung AB đi qua M. Tìm tập hợp trọng tâm tam giác OAB.

Hướng dẫn: Gọi H là trung điểm của AB, tập hợp H là đường tròn đường kính OM mà ta kí hiệu là (w), G là ảnh của H trong phép vị tự $H_O\left(\frac{2}{3}\right)$, do đó tập hợp G là đường tròn (w') nhận được từ (w) bởi phép vị tự đó.

7. Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định nằm trong đường tròn đó. Xét tất cả các tam giác ABC có điểm A cố định, cạnh BC là dây cung của đường tròn (O; R) đi qua M. Tìm tập hợp trọng tâm tam giác ABC.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 6.

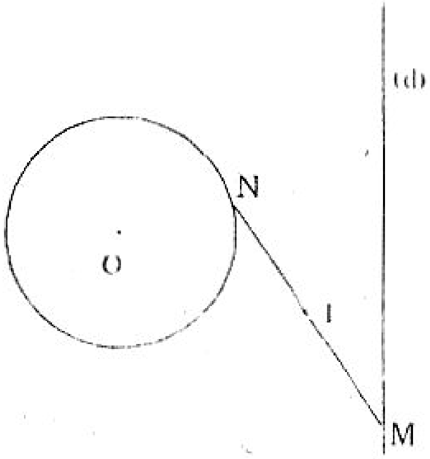
8. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm tam giác. Với mỗi điểm P trên cạnh BC ta lấy các điểm Q trên AC và R trên AB sao cho PQ // BG và PR // CG. Tìm tập hợp trung điểm của đoạn QR và trọng tâm tam giác PQR.

Hướng dẫn: Cần chứng tỏ PG đi qua trung điểm của QR.

9. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng (d). Trên (d) ta lấy điểm M, trên (O; R) ta lấy điểm N và gọi I là trung điểm của MN.

i) Giả sử M cố định, còn N thay đổi trên (O; R). Tìm tập hợp I.

ii) Tìm tập hợp I trong trường hợp cả hai điểm M và N cùng thay đổi.



Hướng dẫn:

i) Tập hợp I là đường tròn w(M) nhận được từ (O; R) bởi phép vị tự $H_M\left(\frac{1}{2}\right)$.

ii) Tập hợp I là hợp của các đường tròn w(M), khi M chạy trên (d).

10. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R'). Trên (O; R) ta lấy điểm M, trên (O'; R') ta lấy điểm M' và gọi I là trung điểm của MM'.

i) Cố định M. Tìm tập hợp I, khi M' thay đổi.

ii) Tìm tập hợp I, khi cả hai điểm M và M' cùng thay đổi.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 9.

57. TÓM TẮT LÍ THUYẾT VỀ PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa

Tích của một phép dời hình và một phép vị tự hoặc một phép vị tự và một phép dời hình được gọi là phép đồng dạng.

Nếu $H_O(k)$ là phép vị tự, F là phép dời hình, thì phép đồng dạng $V(|k|) = H_O(k).F$ hoặc $V(|k|) = F.H_O(k)$. $V(|k|)$ là kí hiệu phép đồng dạng với hệ số $|k|$ (vì phép vị tự $H_O(k)$ có thể có hệ số $k < 0$). Hai hình φ và φ' được gọi là đồng dạng, nếu tồn tại một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Hệ quả

i) Giả sử $\Delta A'B'C'$ là ảnh của ΔABC trong phép đồng dạng $V(|k|)$, khi đó:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = |k| \quad \text{và} \quad \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = k^2.$$

Ngoài ra tỉ số các yếu tố độ dài tương ứng của hai tam giác đó bằng tỉ số đồng dạng $|k|$ và các góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau.

ii) Để hai tam giác ABC và A'B'C' đồng dạng, điều kiện cần và đủ là chúng có hai góc bằng nhau ⇔ có 3 cạnh tỉ lệ.

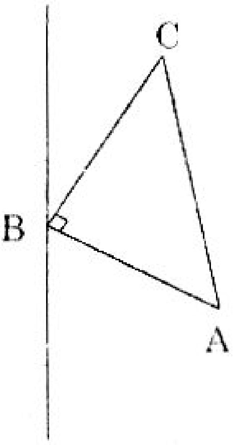
iii) Để hai đa giác n cạnh đồng dạng, điều kiện cần và đủ là chúng có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau.

58. DÙNG PHÉP ĐỒNG DẠNG ĐỂ GIẢI TOÁN

Trong phần này; phép đồng dạng được dùng để giải toán thường là tích của một phép vị tự và một phép quay hoặc phép tịnh tiến hoặc phép đối xứng, nghĩa là các phép dời hình cơ bản.

Tìm tập hợp điểm

Ví dụ 1: Cho đường thẳng (d) và điểm A cố định không nằm trên (d). Với mỗi điểm B ∈ (d), ta dựng điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Tìm tập hợp đỉnh C, khi B thay đổi trên (d).



Giải

Rõ ràng C là ảnh của B trong phép đồng dạng:

$$V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(45^\circ)$$

hoặc $$V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(-45^\circ).$$

Ta biết rằng phép quay $R_A(45^\circ)$: B → B' ($R_A(-45^\circ)$: B → B'); do đó $R_A(45^\circ)$: (d) → (d') ($R_A(-45^\circ)$: (d) → (d')), phép biến đổi $H_A(\sqrt{2})$: B → C; do đó biến (d') → (d'').

Tóm lại tập hợp C là đường thẳng (d'') nhận được từ (d) bằng phép đồng dạng:

$$V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(45^\circ) \quad \text{hoặc} \quad V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(-45^\circ).$$

Có hai đường thẳng.

Dựng hình

Ví dụ 2: Cho đường tròn (O), đường thẳng (d) và điểm A không thuộc (O) và (d). Hãy dựng tam giác vuông cân ABC ($\hat{B} = 1v$) sao cho $B \in (d)$ và $C \in (O)$.

Giải

Giả sử ABC là tam giác đã dựng.

Rõ ràng phép đồng dạng $V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(45^\circ)$: $B \to C \Rightarrow (d) \to (d')$.

Điều này chứng tỏ C là điểm chung của (d') và đường tròn (O).

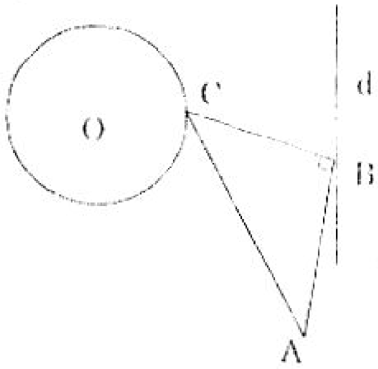
- *Cách dựng:* Dựng ảnh (d') của (d) trong phép đồng dạng:

$$V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(45^\circ) \quad \text{hoặc} \quad V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(-45^\circ).$$

Gọi C là điểm chung của (d') và (O). Dựng B là ảnh của C trong phép đồng dạng:

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).R_A(-45^\circ)$$

hoặc $V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).R_A(45^\circ)$.



- *Chứng minh:* Theo cách dựng tam giác ABC vuông cân tại B và B thuộc ảnh của (d') trong phép đồng dạng:

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).R_A(-45^\circ) \text{ và đó chính là (d).}$$

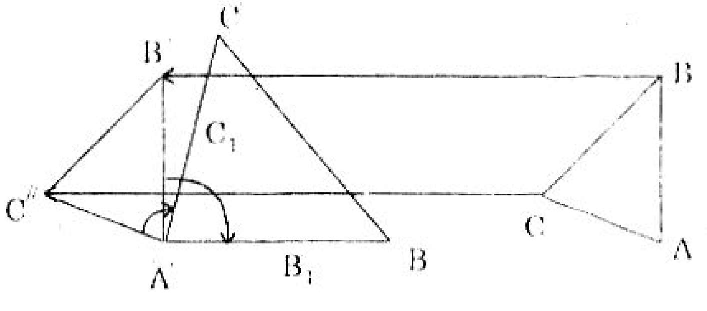
- *Biện luận:* Bài toán có thể vô nghiệm hoặc có nghiệm. Nếu có nghiệm thì số nghiệm tối đa là 4.

Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu hai tam giác ABC và A'B'C' có các cặp cạnh vuông góc, thì chúng đồng dạng.

Giải

Giả sử $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$ và $CA \perp C'A'$. Ta cần chứng minh rằng tồn tại một phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia.



Thật vậy; tịnh tiến tam giác ABC theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$ ta được tam giác A'B''C'' và quay A'B''C'' quanh A' góc 90°, ta được tam giác $A'B_1C_1$, trong đó: $B_1 \in A'B'$, $C_1 \in A'C'$ và $B_1C_1 \parallel B'C'$.

Thực hiện phép vị tự $H_A(k)$: $B_1 \to B'$, $C_1 \to C'$. Như vậy ta đã chỉ ra phép đồng dạng $V = H_A(k).F$; $F = R_A(90^\circ).T$ biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

Tính yếu tố hình học

Ví dụ 4: Trên đoạn AC ta lấy điểm B sao cho $\frac{AB}{AC} = k$ và dựng các hình vuông ABMN, BCPQ nằm về một phía đối với đường thẳng AC. Tính góc nhọn tạo bởi các đường thẳng PN, QA và tỉ số $\frac{PN}{QA}$.

Giải

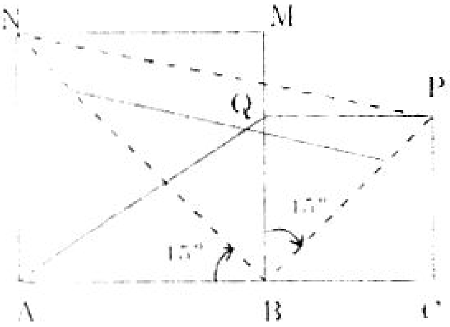
Thực hiện phép đồng dạng

$V(\sqrt{2}) = H_B(\sqrt{2}).R_B(-45^\circ)$: $\Delta ABQ \to \Delta NBP$

(xem hình).

Vì vậy góc tạo bởi PN và QA bằng 45°,

tỉ số $\frac{PN}{QA} = \frac{NB}{AB} = \sqrt{2}$.



59. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Tìm tập hợp điểm

1. Cho đường tròn (O) và điểm A cố định không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm B thuộc (O) ta dựng điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Tìm tập hợp C, khi B thay đổi.

Hướng dẫn: C là ảnh của B trong phép đồng dạng:

$$V(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(45^\circ) \quad \text{hoặc} \quad V'(\sqrt{2}) = H_A(\sqrt{2}).R_A(-45^\circ)$$

Do đó tập hợp C là một trong hai đường tròn

2. Cho đường tròn (O), điểm A cố định không nằm trên (O) và góc α ($0 < \alpha < 90^\circ$). Với mỗi điểm B thuộc (O) ta dựng tam giác cân ABC (AC = BC) có góc tại A bằng α. Tìm tập hợp đỉnh C, khi B thay đổi.

Hướng dẫn: C nhận được từ B bởi phép đồng dạng

$$V\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right) = H_A\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right).R_A(\alpha) \quad \text{hoặc} \quad V'\left(\frac{1}{2\cos\alpha}\right).R_A(-\alpha),$$

do đó tập hợp C là một trong hai đường tròn.

3. Cho đường tròn (O) và đường thẳng (d). Xét tất cả các tam giác vuông cân ABC ($\hat{A} = 1v$) có đỉnh B thuộc (O), đỉnh C thuộc (d). Tìm tập hợp đỉnh A.

Hướng dẫn: Cố định C, rõ ràng A là ảnh của B trong phép đồng dạng:

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).R_A(45^\circ) \quad \text{hoặc} \quad V'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = H_C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).R_A(-45^\circ).$$

Vì vậy nếu C cố định thì tập hợp A là một trong hai đường tròn. Khi C thay đổi trên (d) thì tập hợp A là hợp của tất cả các đường tròn như vậy.

4. Cho hình vuông ABCD và điểm P không phụ thuộc hình vuông và không là điểm trong của nó. Với mỗi điểm Q thuộc ABCD hoặc là điểm trong của hình vuông ta dựng tam giác đều PQR. Tìm tập hợp trọng tâm của PQR, khi Q biến thiên.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 2.

Tính các yếu tố hình học

1. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm A và A'. Trên đường tròn (O; R) ta lấy điểm B; trên đường tròn (O'; R') ta lấy điểm C sao cho BC đi qua A'.

i) Hãy chỉ ra phép đồng dạng biến tam giác OAO' thành tam giác ABC.

ii) Cho biết OO' = d; $\widehat{OAB} = \alpha$. Tính độ dài BC.

Hướng dẫn:

i) Vì $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = \alpha$, nên phép quay $R_A(\alpha)$: tia AB → tia AO, thì tia AC → tia OA'. Kí hiệu AB'C' là ảnh của tam giác ABC trong phép quay đó. Thực hiện phép vị tự: $H_A(k)$: B' → O, C' → O'.

Tóm lại phép đồng dạng: $V(k) = H_A(k).R_A(\alpha)$: $\Delta ABC \to \Delta AOO'$.

ii) Ta có: $\dfrac{BC}{OO'} = \dfrac{AB}{AO} = 2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad BC = 2d.\cos\alpha.$

2. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B và dựng các hình vuông ABMN và BCPQ nằm về một phía với AC. Kí hiệu K, H lần lượt là trung điểm các đoạn CP và MN.

i) Hãy chỉ ra phép đồng dạng biến tam giác BPN thành tam giác BKH.

ii) Cho biết AB = 2BC, tính góc tạo bởi KH, PN và tỉ số $\dfrac{KH}{PN}$.

Hướng dẫn: i) Rõ ràng: $\widehat{KBP} = \widehat{HBN} = \alpha$

$\Rightarrow$ phép đồng dạng $V\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right) = H_B\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5}\right).R_B(\alpha)$.

ii) Góc nhọn tạo bởi KH và PN là α và thỏa mãn hệ thức:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{10}}; \quad \frac{KH}{PN} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 30^\circ$, AB = 1, BC = 3 nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi D là giao điểm của đường thẳng AO và đường tròn (O). H là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ A. Hãy chỉ ra phép đồng dạng biến tam giác AHB thành tam giác ADC (tức là chỉ ra phép quay và phép vị tự).

Hướng dẫn: Đặt $\alpha = \widehat{BAD}$, phép quay $R_A(\alpha)$: tia AB → tia AD, tia AH → tia AC $\Rightarrow \Delta ABH \rightarrow \Delta AB'H'$. Phép vị tự $H_A(\sqrt{10} - 3\sqrt{3})$: $\Delta AB'H' \rightarrow \Delta ADC$.

Tóm lại phép đồng dạng $V = H_A(\sqrt{10} - 3\sqrt{3}).R_A(\alpha)$ biến tam giác ABH thành tam giác ADC.

4. Hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm A và B. Tiếp tuyến tại A của (O; R) cắt (O'; R') tại D, tiếp tuyến tại A của (O'; R') cắt (O; R) tại C và biết $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{ADB} = \beta$.

i) Hãy chỉ ra phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác ABD.

ii) Tính độ dài CD.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 2.

5. Tính diện tích tam giác, biết 3 đường cao.

Hướng dẫn: Kí hiệu h_a, h_b, h_c là các đường cao hạ xuống các cạnh tương ứng a, b, c. Ta có: $a.h_a = b.h_b = c.h_c \Rightarrow \dfrac{a}{\dfrac{1}{h_a}} = \dfrac{b}{\dfrac{1}{h_b}} = \dfrac{c}{\dfrac{1}{h_c}} \Rightarrow$ Tam giác có 3 cạnh a, b, c đồng dạng với tam giác có 3 cạnh là $\dfrac{1}{h_a}, \dfrac{1}{h_b}, \dfrac{1}{h_c}$.

Nếu S và S' là diện tích các tam giác tương ứng, thì

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{a}{\dfrac{1}{h_a}}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = 4S^2 \Rightarrow S = \frac{1}{4S'}.$$

Bằng cách dùng công thức Heron ta tính được S'.

6. Cho tam giác ABC có diện tích S. Kí hiệu (T_1) là tam giác lập bởi 3 trung tuyến của ΔABC, (T_2) là tam giác lập bởi 3 trung tuyến của tam giác (T_1). Tính diện tích của (T_2).

Hướng dẫn: $\Delta(T_2) \backsim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng $k = \dfrac{3}{2}$.

7. Trên đoạn thẳng AC ta lấy điểm B và dựng các tam giác đều ABM, BCN nằm về một phía đối với AC. Kí hiệu O và O' là tâm của các tam giác đều ABM và BCN.

i) Hãy chỉ ra phép đồng dạng biến tam giác BMC thành tam giác BOO'.

ii) Tính góc tạo bởi MC và OO'.   iii) Tính tỉ số $\frac{OO'}{MC}$.

Hướng dẫn: i) Xem cách giải của bài 2.   ii) 30°.   iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chứng minh các tính chất hình học

1. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và $AC < AB < BC$. Trên các cạnh BA và BC ta lấy các điểm K và M sao cho $AK = CM = AC$. Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BKM bằng khoảng cách giữa tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC, đồng thời KM vuông góc với đường thẳng đi qua tâm các đường tròn đó.

Hướng dẫn: Kí hiệu O và I lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC, ta hạ $ON \perp AB$, $OP \perp BC$, $IL \perp AB$, $IQ \perp BC$
$\Rightarrow$ $BK = |c - b|$, $BM = |b - a|$, $BN = 0{,}5c$, $BP = 0{,}5a$ $\Rightarrow$ $BL = BQ = p - b$
$\Rightarrow$ $LN = 0{,}5|a - b|$, $PQ = 0{,}5|c - b|$.

Ta lấy trên IQ sao cho OS // BC, trên IL điểm R sao cho OR // AB; khi đó: $\Delta OSR \backsim \Delta BKM$ (hai tam giác có một góc bằng nhau và xen giữa là hai cạnh tỉ lệ) và tỉ số đồng dạng $\frac{OR}{BM} = \frac{1}{2}$. Ta kí hiệu r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK $\Rightarrow$ $\frac{OI}{2r} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow OI = r$. Tịnh tiến tam giác MBK theo $\overrightarrow{BO}$ ta nhận được tam giác OR_1S_1 có $S_1 \in$ tia OS, $R_1 \in$ tia OR, vì $\Delta OR_1S_1 \backsim \Delta ORS$; do đó ta suy ra điều cần chứng minh.

2. Cho hình thoi ABCD và đường tròn (O) nội tiếp trong hình thoi. Giả sử tiếp tuyến thứ nhất của (O) cắt các cạnh AB và AD tương ứng tại các điểm M và Q. Tiếp tuyến thứ hai của (O) cắt các cạnh BC và CD tương ứng tại các điểm N và P.

i) Chứng minh rằng: $\Delta OMQ \backsim \Delta OQD \backsim \Delta OMB$ và $\Delta ONP \backsim \Delta ONB \backsim \Delta OPD$.

ii) Chứng minh rằng: MN // PQ.

Hướng dẫn: i) Đặt $\alpha = \widehat{ABD}$, $\beta = \widehat{BOM}$, $\gamma = \widehat{DOQ}$

$\Rightarrow$ $\widehat{OMB} = \pi - (\alpha + \beta)$, $\widehat{OQD} = \pi - (\alpha + \gamma)$.

Vì $\widehat{OMB} = \widehat{OMQ}$, $\widehat{OQD} = \widehat{OQM}$

$\Rightarrow$ $\widehat{OMB} + \widehat{OQD} = \beta + \gamma$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$\Rightarrow$ $\widehat{OQD} = \beta$, $\widehat{OMB} = \beta$ $\Rightarrow$ $\Delta OMB \backsim \Delta OQD$.

ii) Từ i) ta suy ra: $4QD.MB = BD^2$.

Tương tự ta có: $4PD.BN = BD^2$ $\Rightarrow$ $\Delta PQD \backsim \Delta BMN$

$\Rightarrow$ $\widehat{BMN} = \widehat{PQD}$

3. Cho tam giác ABC và CE là trung tuyến của tam giác. Qua điểm P bất kì ta dựng các đường thẳng $x \perp BC$, $y \perp AC$ và $z \perp CE$. Kí hiệu K, L, M lần lượt là các giao điểm của x, y, z và đường cao CD. Chứng minh rằng: KM = LM.

Hướng dẫn: Nếu $P \in CD$, thì $P \equiv K \equiv L \equiv M \Rightarrow KM = LM = 0$.

Nếu $P \notin CD$, thì các cạnh tương ứng của các tam giác PKM và CBE vuông góc; PLM và CAE vuông góc.

Vì vậy $\Delta CBE \backsim \Delta PKM$, $\Delta PLM \backsim \Delta CAE \Rightarrow \dfrac{PM}{CE} = \dfrac{KM}{BE}$, $\dfrac{PM}{CE} = \dfrac{LM}{AE}$.

4. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tương ứng tại K, L và với cạnh BC tại E. Đường thẳng OE cắt KL tại M. Đường thẳng đi qua M và song song với BC cắt AB và AC tương ứng tại các điểm P và Q.

i) Chứng minh rằng tồn tại một phép đồng dạng biến tam giác OKL thành tam giác OPQ.

ii) Chứng minh rằng: A, M và trung điểm của cạnh BC thẳng hàng.

5. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm A', B', C'. Chứng minh rằng nếu $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, thì ABC là tam giác đều.

Hướng dẫn: Các góc của tam giác A'B'C' tính theo các góc của tam giác ABC: $\widehat{A'} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$; $\widehat{B'} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{B}}{2}$; $\widehat{C'} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Xem $\widehat{A} \geq \widehat{B} \geq \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C'} \geq \widehat{B'} \geq \widehat{A'}$ và từ $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$, ta suy ra: $\widehat{A'} = \widehat{C}$ và $\widehat{C'} = \widehat{A}$.

6. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên cung $\overset{\frown}{BC}$. Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AC và AB.

i) Chứng minh rằng tồn tại một phép đồng dạng biến tam giác MBC thành tam giác MPQ.

ii) Gọi H là giao điểm của PQ và BC. Chứng minh rằng: $MH \perp BC$.

Hướng dẫn:

i) Hãy chứng minh rằng: $\widehat{BMQ} = \widehat{CMP}$ và nếu Q thuộc dây cung AB thì P nằm ngoài dây cung AC.

ii) PQ hợp với BC một góc bằng $\widehat{BMQ} \Rightarrow$ H thuộc đường tròn đi qua 3 điểm M, B, Q.

7. Cho 3 đường tròn (O), (O'), (O'') cùng đi qua điểm chung M và đôi một cắt nhau lần thứ hai tại các điểm A, B, C.

Chứng minh rằng: $\Delta ABC \backsim \Delta OO'O''$.

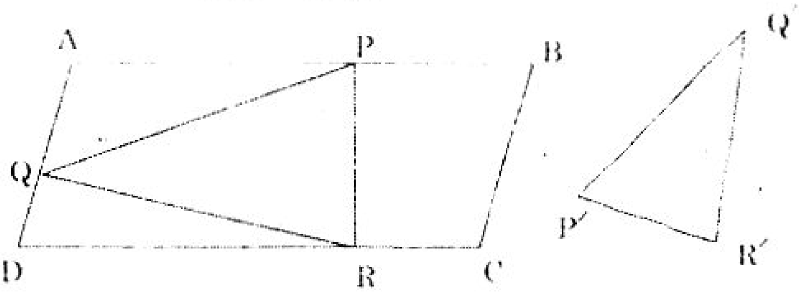
Hướng dẫn: Xem cách giải bài 1 (trong phần *tính các yếu tố hình học*)

Dựng hình

1. Cho hình bình hành ABCD và điểm P nằm trên cạnh AB. Hãy dựng tam giác PQR sao cho các đỉnh Q thuộc AD, R thuộc CD và tam giác PQR đồng dạng với tam giác P'Q'R' cho trước.

Hướng dẫn: Từ $\Delta PQR \backsim \Delta P'Q'R' \Rightarrow \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{P'Q'}{P'R'} = k$.

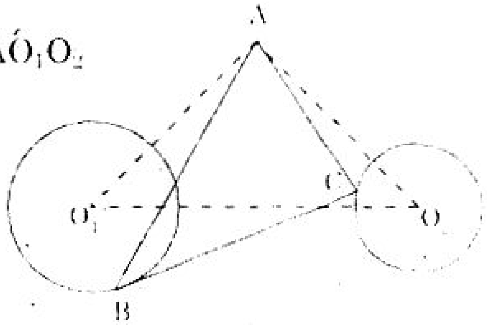
Ta kí hiệu $\alpha = \widehat{Q'P'R'}$, phép đồng dạng $V(k) = H_P(k).R_P(\alpha)$: $R \rightarrow Q \Rightarrow CD \rightarrow C'D'$ đi qua Q và do đó Q là giao điểm của C'D' và BC.



2. Cho đường tròn $(O_1; R_1)$, $(O_2; R_2)$ và điểm A không thuộc cả hai đường tròn đã cho. Hãy dựng tam giác ABC sao cho đỉnh B thuộc $(O_1; R_1)$, C thuộc $(O_2; R_2)$ và $\Delta ABC \backsim \Delta AO_1O_2$.

Hướng dẫn: Đặt $\alpha = O_1AO_2$, từ $\Delta ABC \backsim \Delta AO_1O_2$ ta suy ra: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AO_2}{AO_1} = k$.

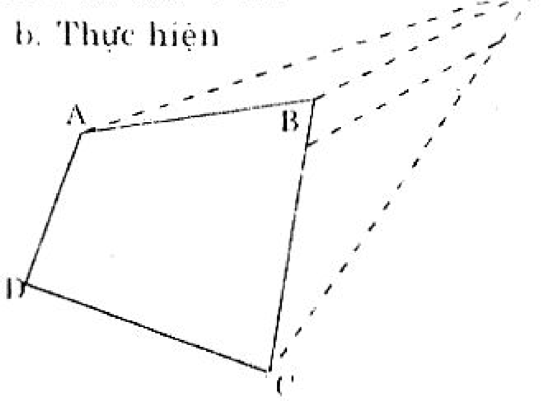
Phép đồng dạng: $V(k) = H_A(k).R_A(\alpha)$: $B \rightarrow C$ $\Rightarrow (O_1; R_1) \rightarrow (O_3; R_3)$ và C là điểm chung của hai đường tròn $(O_3; R_3)$ và $(O_2; R_2)$.



3. Dựng tứ giác ABCD, biết $\hat{B} + \hat{D} = \alpha$, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d.

Hướng dẫn: Thực hiện phép quay $R_A(BAD)$: tia AB → AD và B → B' ∈ tia AD, khi đó C → C', B'C' = b. Thực hiện phép vị tự: HA(k): B' → D, C' → C''

$$\Rightarrow DC'' = kB'C' = kb\left(k = \frac{d}{a}\right)$$



Tam giác CDC'' hoàn toàn xác định, vì biết CD = c, DC'' = kb và góc:

$$\widehat{CDC''} = 360° - (\alpha + \beta).$$

Mặt khác AD = d $\Rightarrow$ A ∈ (D, d): $\dfrac{AC}{AC''} = \dfrac{AC'}{AC''} = \dfrac{AB'}{AD} = \dfrac{a}{d}$; hệ thức này chứng tỏ A thuộc đường tròn đường kính là các điểm chia trong và chia ngoài đoạn CC'' theo tỉ số $\dfrac{a}{d}$. Tóm lại A là giao điểm của hai đường tròn.

4. Dựng tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn, biết 4 cạnh tứ giác.

Hướng dẫn: Xem cách giải bài 3.

PHỤ LỤC

60. TÍCH CỦA HAI PHÉP QUAY

Định nghĩa

Phép quay với góc α thỏa mãn điều kiện: $0 \le \alpha \le 360^\circ$.

Cho điểm O và một số thực α trong đó $0 \le \alpha \le 360^\circ$. Với mỗi điểm M khác O ta dựng điểm M' sao cho:

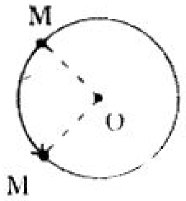
i) OM = OM'

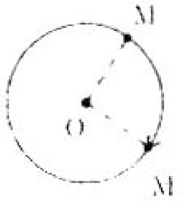
ii) Điểm M di động trên đường tròn tâm O bán kính OM đến trùng với M' theo chiều ngược kim đồng hồ.

iii) Cung $\overset{\frown}{MM'}$ do M vạch ra có số đo bằng α (đo bằng độ hoặc radian).

iiii) Với điểm M trùng với O, thì M' là O.

Khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép quay tâm O, góc quay α và kí hiệu $R_O(\alpha)$: M → M'. Phép quay $R_O(\alpha)$ được gọi là phép quay dương.

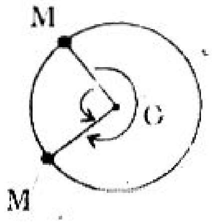


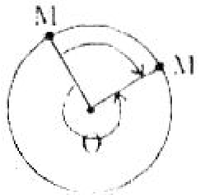


Nếu M di chuyển trên đường tròn tâm O bán kính OM đến trùng với M' theo chiều kim đồng hồ, thì ta kí hiệu $R_O(-\alpha)$ và được gọi là phép quay âm.

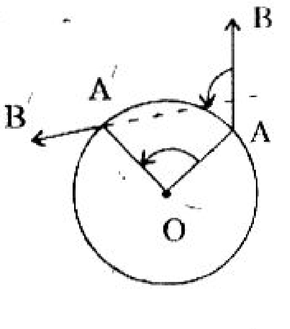
Các tính chất

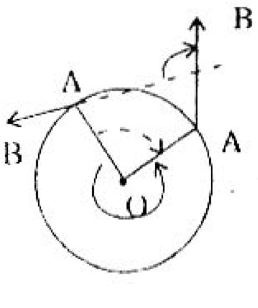
i) Phép quay $R_O(\alpha)$: M → M', thì phép quay $R_O(\alpha - 360^\circ)$: M → M'. Phép quay $R_O(-\alpha)$: M → M', thì phép quay $R_O(360^\circ - \alpha)$: M → M' $(0 < \alpha < 360^\circ)$





ii) Nếu A' và B' là ảnh của hai điểm A và B trong phép quay $R_O(\alpha)$, thì A'B' = AB và góc tạo bởi các vectơ $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) = \alpha$, nếu $0 < \alpha < 180^\circ$ và $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) = 360^\circ - \alpha$, nếu $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.



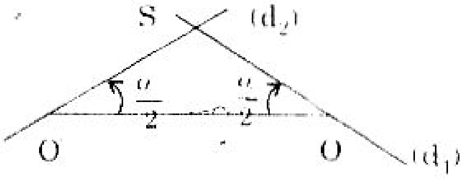


iii) Một số tính chất khác của phép quay $R_O(\alpha)$:

Với $0 < \alpha < 180°$ vẫn còn đúng đối với phép quay $R_O(\alpha)$ với $0° < \alpha < 360°$.

Định lí

Cho hai phép quay $R_O(\alpha)$ và $R_{O'}(\alpha')$ với O và O' không trùng nhau, $0 < \alpha < 360°$, $0 < \alpha' < 360°$ và $\frac{\alpha + \alpha'}{2} < 180°$, khi đó phép biến đổi: $R = R_{O'}(\alpha').R_O(\alpha)$ là một phép quay với góc quay $\beta = \alpha + \alpha'$, tâm quay S; được dựng như sau:



$$R_O\left(-\frac{\alpha}{2}\right): O'O \to (d_1); \qquad R_{O'}\left(\frac{\alpha'}{2}\right): O'O \to (d_2)$$

và S là giao điểm của (d_1) và (d_2).

- *Chứng minh:*

– Trường hợp $0 < \alpha < 180°$ và $0 < \alpha' < 180°$: trước hết ta chỉ ra rằng R có điểm bất động. Giả sử S là điểm bất động của R, nghĩa là $R: S \to S$.

Điều đó có nghĩa là $R_O(\alpha): S \to S'$ và $R_{O'}(\alpha'): S' \to S$. Theo định nghĩa phép quay ta có: $OS' = OS$ và $(\vec{OS'}, \vec{OS}) = \alpha$; $O'S = O'S'$ và $(\vec{O'S}, \vec{O'S'}) = \alpha'$

$\Rightarrow \Delta OSO' = \Delta OS'O'$.

Nếu xem $R_O\left(-\frac{\alpha}{2}\right): OO' \to (d_1)$ và $R_{O'}\left(\frac{\alpha'}{2}\right): O'O \to (d_2)$ và theo điều kiện đã cho: $\frac{\alpha + \alpha'}{2} < 180°$, thì (d_1) cắt (d_2) tại S.

– Trường hợp $0 < \alpha < 180°$ và $180° < \alpha' < 360°$, bạn đọc tự chứng minh.

Tóm lại ta đã chứng minh được R có điểm bất động và chỉ ra cách dựng nó. Bây giờ ta chứng minh rằng R là phép quay trong trường hợp $0 < \alpha < 180°$ và $0 < \alpha' < 180°$ (trường hợp còn lại bạn đọc tự chứng minh).

Giả sử A là điểm bất kì khác S, khi đó $R_O(\alpha): S \to S'$, $A \to A'$ và $SA = S'A'$, $(\vec{SA}, \vec{S'A'}) = \alpha$; $R_{O'}(\alpha'): S' \to S$, $A' \to A''$ và $S'A' = SA''$, $(\vec{S'A'}, \vec{SA''}) = \alpha'$.

Từ các kết quả đó ta suy ra: $SA = SA''$

và $(\vec{SA}, \vec{SA''}) = (\vec{SA}, \vec{S'A'}) + (\vec{S'A'}, \vec{SA''}) = (\vec{SA}, \vec{SB}) + (\vec{SB}, \vec{SA''}) = \alpha + \alpha'$, trong đó:

$\vec{SB} = \vec{S'A'}$ và điều này chứng tỏ điểm A di động trên đường tròn tâm S bán kính SA đến trùng với A'' theo chiều dương vạch một cung $\overset{\frown}{ABA''}$ có số đo bằng $\alpha + \alpha'$.

61. DÙNG TÍCH HAI PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI TOÁN

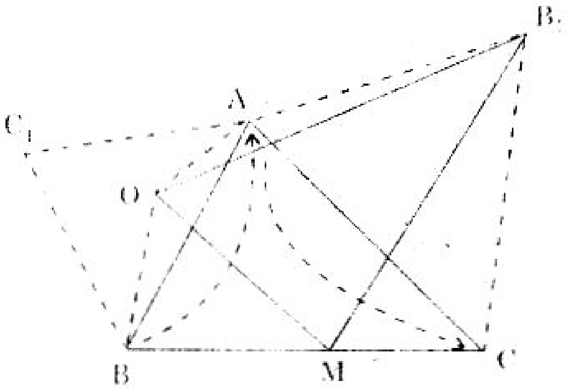
Để giải toán bằng tích hai phép quay; ta nên chú ý các bước làm sau:

i) Chọn cách biểu diễn hình của bài toán sao cho khi thực hiện từng phép quay riêng biệt là phép quay dương.

ii) Dựng tâm của tích hai phép quay và xác định chiều của phép quay tích.

Ta xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC và trên các cạnh AB, AC vẽ phía ngoài tam giác ta dựng các tam giác đều ABC_1 và ACB_1. Gọi O là trọng tâm tam giác ABC_1, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác MOB_1 vuông tại M và $\frac{MB_1}{OM} = \sqrt{3}$.



Giải

Ta thực hiện các phép quay:

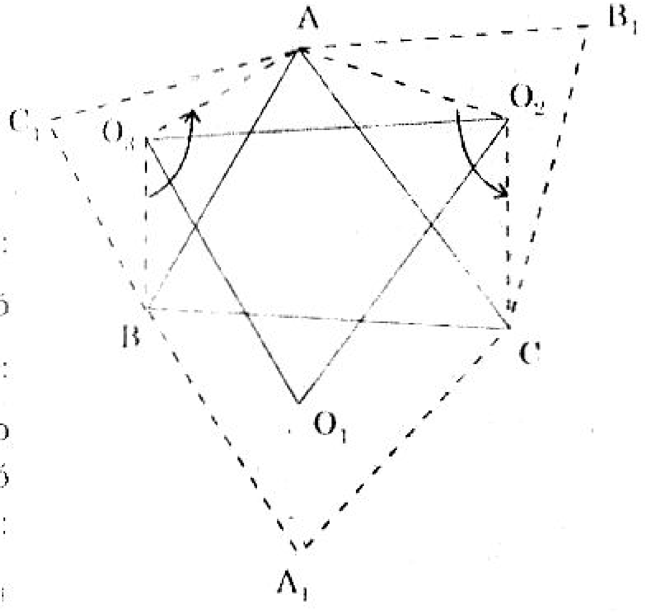
$R_O(120^\circ)$: B → A,

$R_{B_1}(60^\circ)$: A → C

(xem hình bên), khi đó:

$R = R_{B_1}(60^\circ) \bullet R_O(120^\circ)$: B → C và do tổng hai góc quay bằng 180°, nên R là một phép đối xứng qua trung điểm M của BC. Mặt khác; R là một phép quay mà tâm quay S được xác định như sau: $R_O(-60^\circ)$: $OB_1 \to (d_1)$, $R_{B_1}(30^\circ)$: $B_1O \to (d_2)$ và S là giao điểm của (d_1), (d_2) nằm cùng phía với M đối với OB_1. Điều đó chứng tỏ M và S trùng nhau và ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và trên 3 cạnh tam giác về phía ngoài ta dựng các tam giác đều. Chứng minh rằng tam giác có đỉnh là trọng tâm các tam giác đều vừa dựng là tam giác đều.



Giải

Ta kí hiệu O_1, O_2, O_3 là tâm của 3 tam giác đều dựng trên 3 cạnh tam giác ABC (xem hình).

Thực hiện các phép quay $R_{O_3}(120^\circ)$: B → A, $R_{O_2}(120^\circ)$: A → C, khi đó phép quay: $R = R_{O_2}(120^\circ).R_{O_3}(120^\circ)$: B → C; tâm S của phép quay R là giao của hai đường thẳng (d_1), (d_2) trong đó $R_{O_3}(-60^\circ)$: $O_3O_2 \to (d_1)$, $R_{O_2}(60^\circ)$: $O_2O_3 \to (d_2)$ và S cùng phía với O_1

đối với O_2O_3.

Tóm lại phép quay $R_S(240^\circ): B \to C \Leftrightarrow R_S(-120^\circ): B \to C$ và $R_{O_1}(120^\circ): B \to C$.

Điều đó chứng tỏ rằng $O_1 \equiv S$.

62. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho tam giác ABC và về phía ngoài tam giác ta dựng các tam giác cân ABC_1 sao cho $\widehat{AC_1B} = 150^\circ$, tam giác cân ACB_1 sao cho $\widehat{AB_1C} = 120^\circ$, tam giác vuông cân BA_1C sao cho $\widehat{BA_1C} = 90^\circ$. Tính các góc của tam giác $A_1B_1C_1$.

2. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác lồi ABCD ta dựng các tam giác đều ABM, CDN, BCP, ADQ về phía ngoài tứ giác. Gọi K và H là trọng tâm các tam giác BCP và ADQ.

Chứng minh rằng: $MN \perp KH$ và $\dfrac{MN}{KH} = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn: Dùng kết quả của ví dụ 1.

3. Trên các cạnh AB, AC của tam giác ABC và về phía ngoài tam giác ta dựng các tam giác đều ABC_1 và ACB_1. Gọi K và L là trung điểm các đoạn AC_1 và CB_1, trên BC lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$. Chứng minh rằng tam giác KLM vuông tại M.

4. Cho tam giác ABC và trên các cạnh AB, AC về phía trong tam giác ta dựng các tam giác đều ABC_1 và ACB_1. Gọi O là trọng tâm tam giác ABC_1, M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng tam giác MOB_1 vuông tại M và $\dfrac{MB_1}{OM} = \sqrt{3}$.

5. Cho tam giác ABC. Xác định tâm của phép quay $R = R_A(\alpha).R_B(\beta)$ và phép quay $R' = R_A(\alpha).R_B(\beta).R_C(\gamma)$, trong đó: $\alpha = \hat{A}$, $\beta = \hat{B}$, $\gamma = \hat{C}$.

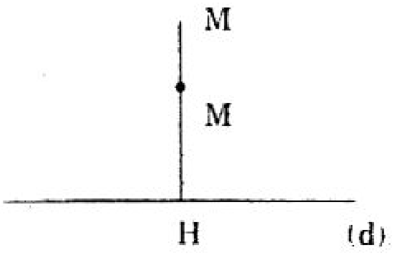
Hướng dẫn: Tâm của phép quay $R = R_A(\alpha).R_B(\beta)$ là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Tâm của phép quay $R' = R_A(\alpha).R_B(\beta).R_C(\gamma)$ là tiếp điểm của đường tròn và một cạnh tam giác.

63. PHÉP CO VÀ DÃN

Định nghĩa

Cho đường thẳng (d) và số $k > 0$. Với mỗi điểm M ta dựng điểm M' sao cho $\overrightarrow{HM'} = k.\overrightarrow{HM}$, trong đó H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống (d), khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép co (dãn) về trục (d) với hệ số k và kí hiệu $F_d(k): M \to M'$. Nếu $k > 1$, thì $F_d(k)$ được gọi là phép dãn. Nếu $k < 1$, thì $F_d(k)$ được gọi là phép co, (d) được gọi là trục co hoặc trục dãn.

Cho hình φ; tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc φ lập thành hình φ' được gọi là hình co (dãn) của φ.



Các tính chất của phép co (dãn)

i) Phép co (dãn) $F_d(k)$: (d) → (d).

Thật vậy nếu M ∈ (d), thì:

$$\overrightarrow{MM'} = k.\overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Rightarrow M' \equiv M.$$

ii) Nếu A, B, C là điểm thẳng hàng, thì ảnh của 3 điểm đó trong phép co (dãn) cũng thẳng hàng và biến đường thẳng x thành đường thẳng x'.

Ta chọn hệ tọa độ sao cho (d) trùng với trục Ox và trong hệ tọa độ đó $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, ảnh của các điểm đó là $A'(x_1;\ ky_1)$, $B'(x_2;\ ky_2)$, $C'(x_3;\ ky_3)$.

$$\text{Điều kiện A, B, C thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{ky_2 - ky_1}{ky_3 - ky_1}$$

$$\Leftrightarrow A'B' \,//\, A'C'.$$

iii) Nếu AB và CD là hai đoạn thẳng song song hoặc nằm trên cùng một đường thẳng, A'B' và C'D' là ảnh của chúng trong phép co (dãn), thì A'B' và C'D' cùng phương và $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$.

Xem chứng minh tính chất ii)

iiii) Giả sử tam giác ABC có diện tích S, A'B'C' là ảnh của ABC trong phép co (dãn) $F_d(k)$ và có diện tích S', khi đó S' = k.S.

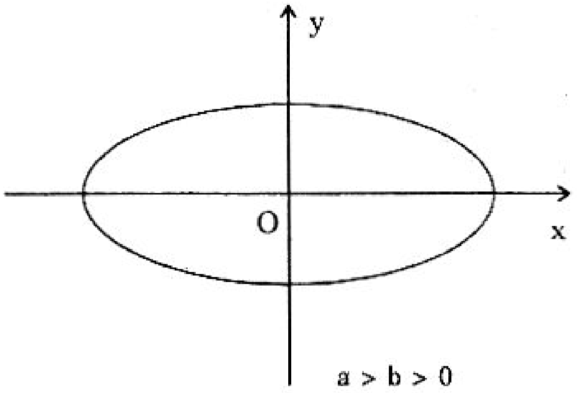
Xét các trường hợp sau: AB thuộc (d); A ∈ (d) và các đỉnh còn lại nằm về một phía với (d); ABC bất kì.

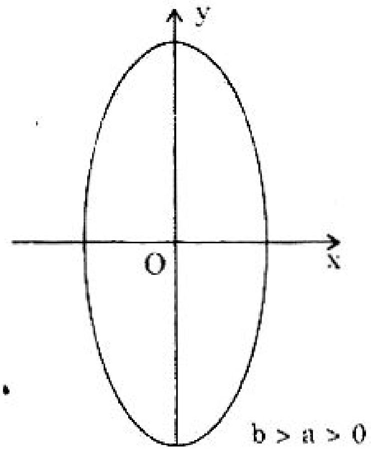
iiiii) Tồn tại phép co (dãn) $F_d(k)$ biến một đường tròn thành một elíp và nếu (d) trùng với trục của elíp tồn tại một phép co (dãn) biến elíp thành đường tròn.

Trong hệ trực chuẩn, đường cong có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

trong đó a > b > 0 hoặc 0 < a < b, được gọi là đường elip. Các số thực a, b được gọi là các bán trục của elíp.

Đồ thị của elíp có dạng:





Ta chọn hệ tọa độ sao cho (d) trùng với trục Ox và trong hệ này đường tròn (w) có phương trình: $x^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Thực hiện phép co $F_{Ox}(k)$: $M(x; y) \to M'(x'; y')$,

trong đó $x' = x$ và $y' = ky$ (*), thay (*) vào phương trình đường tròn ta được:

$$x'^2 + \frac{(y' - y'_0)^2}{k^2} = R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'^2}{R^2} + \frac{(y' - y'_0)^2}{k^2R^2} = 1.$$

Đảo lại; nếu (d) là trục Ox, bằng cách thực hiện phép co $F_{Ox}\left(\frac{a}{b}\right)$: $M(x; y)$ $\to M'(x'; y')$, $x' = x$ và $y' = \frac{a}{b}y$, biến elíp: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

trong đó $a > b > 0$ thành đường tròn: $x'^2 + y'^2 = a^2$.

64. DÙNG PHÉP CO VÀ DÃN ĐỂ GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: Trong hệ trực chuẩn Oxy cho elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và tam giác ABC nội tiếp trong (E) (3 đỉnh tam giác nằm trên đường cong).

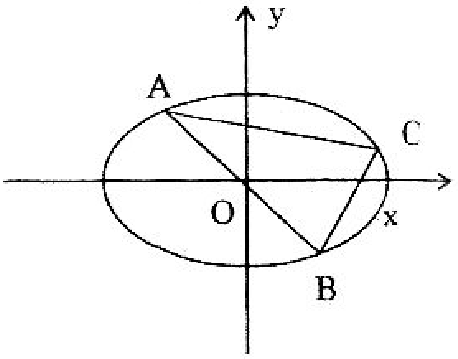
Chứng minh rằng: $S_{ABC} \leq \frac{3ab\sqrt{3}}{4}$ (*)

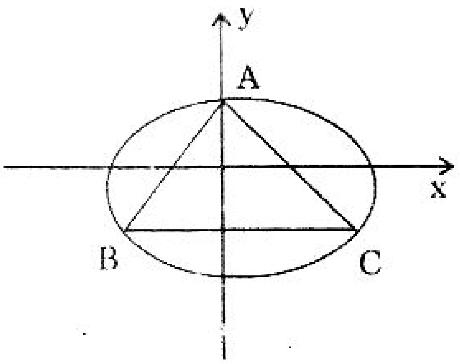
Giải

Thực hiện phép dãn $F_{Ox}\left(\frac{a}{b}\right)$ biến (E) thành đường tròn (w) có phương trình: $x^2 + y^2 = a^2$, khi đó ΔABC biến thành $\Delta A'B'C'$ nội tiếp trong (w). Ta biết rằng:

$$S_{\Delta A'B'C'} \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{và} \quad S_{\Delta A'B'C'} = \frac{a}{b}S_{ABC} \quad \Rightarrow \quad S_{ABC} \leq \frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra trong (*) khi: $A(0; b)$, $B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{b}{2}\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{b}{2}\right)$.





Ví dụ 2: Cho elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên nó. Đường thẳng có phương trình: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ được gọi là tiếp tuyến của (E). Chứng minh rằng trong phép dãn $F_{Ox}\left(\frac{a}{b}\right)$ biến (E) thành đường tròn (w), thì tiếp tuyến của (E) biến thành tiếp tuyến của (w).

Giải

Phép dãn $F_{Ox}\left(\frac{a}{b}\right)$ biến (E) thành (w) có phương trình: $x'^2 + y'^2 = a^2$

và biến đường thẳng: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ thành đường thẳng có phương trình:

$x'_0x' + y'_0y' = a^2$, trong đó: $x' = x$, $y' = \frac{a}{b}y$.

Ta biết rằng đường thẳng: $x'_0x' + y'_0y' = a^2$ là tiếp tuyến của (w): $x'^2 + y'^2 = a^2$ tại $M'(x'_0, y'_0) \in (w)$. Từ kết quả trên ta suy ra tiếp tuyến của (E) chỉ có một điểm chung duy nhất với (E).

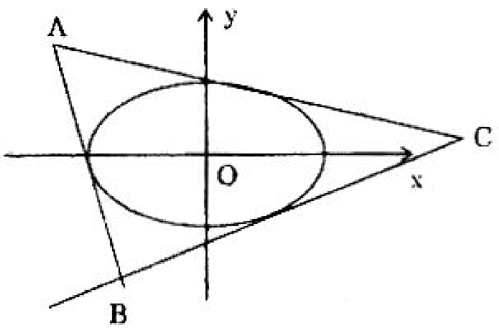
Ví dụ 3: Cho elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và tam giác ABC ngoại tiếp (E) (các cạnh của tam giác thuộc các tiếp tuyến của (E)). Chứng minh rằng: $S_{ABC} \geq 3ab\sqrt{3}$.

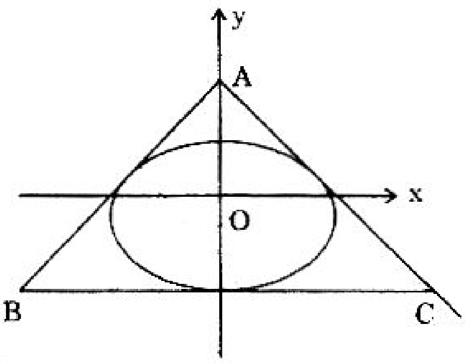
Giải

Thực hiện phép dãn $F_{Ox}\left(\frac{a}{b}\right)$ biến (E) thành (w) có phương trình: $x'^2 + y'^2 = a^2$; khi đó ΔABC biến thành ΔA'B'C' ngoại tiếp (w). Ta đã biết:

$$S_{\Delta A'B'C'} \geq 3a^2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{b}S_{\Delta ABC} \geq 3a^2\sqrt{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC} \geq 3ab\sqrt{3} \quad (**)$$

Dấu "=" trong (**) xảy ra khi: $A(0; 2b)$, $B(a\sqrt{3}; -b)$, $C(-a\sqrt{3}; -b)$.

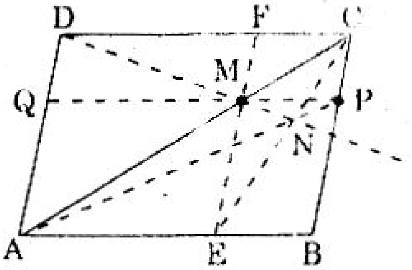


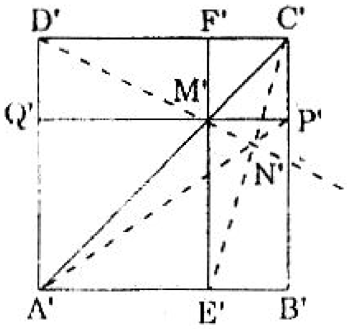


Ví dụ 4: Trên đường chéo AC của hình bình hành ABCD ta lấy điểm M (khác A và C). Đường thẳng qua M song song với AD cắt AB, CD lần lượt tại E, F. Đường thẳng đi qua M song song với AB cắt BC, AD lần lượt tại P, Q; AP và CE cắt nhau tại N. Chứng minh rằng: 3 điểm D, M, N thẳng hàng.

Giải

Rõ ràng tồn tại một phép co biến hình bình hành ABCD thành hình vuông A'B'C'D' và các điểm E, F, P, Q, M, N có các ảnh tương ứng là E', F', P', Q', M', N'. Để chứng minh D, M, N thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh 3 điểm D', M', N' thẳng hàng.





Việc chứng minh sự thẳng hàng của 3 điểm B', M', N' là dễ dàng (bạn đọc tự làm). Qua ví dụ này, cho thấy có thể dùng phép co để đưa bài toán phức tạp về bài toán đơn giản.

65. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Trong số các tứ giác nội tiếp một elíp cho trước có phương trình:

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, hãy tìm một tứ giác có diện tích lớn nhất.

2. Trong số các tứ giác ngoại tiếp elíp cho trước có phương trình:

   $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, hãy tìm một tứ giác có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho elíp: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và các đa giác lồi n cạnh nội tiếp trong nó. Hãy tìm một đa giác có diện tích lớn nhất.

4. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và hai điểm M, N thuộc (E).

Các tiếp tuyến của (E) tại M và N cắt nhau tại S. Tìm tập hợp S, khi đường thẳng MN thay đổi nhưng luôn đi qua một điểm cố định.

5. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và dây cung AB (dây cung của (E) là đoạn thẳng có hai đầu mút thuộc (E)). Gọi I là trung điểm của AB. Qua I ta dựng hai dây cung MN và PQ của (E) (N và Q nằm cùng phía với AB), các đường thẳng MQ và NP cắt AB tương ứng tại các điểm K và H.

Chứng minh rằng IK = IH *(Bài toán Con Bướm trong đường elíp).*

6. Cho đoạn AB = a và phép co $F_d(k)$ biến AB thành đoạn A'B', biết góc nhọn tạo bởi AB và trục co (d) bằng α. Tính A'B' và góc tạo bởi AB và A'B'.

7. Cho phép co $F_d(k)$ với $k \neq 1$ và hai đường thẳng (d_1), (d_2) tạo với chiều dương của (d) những góc có hệ số tương ứng là a_1, a_2. Kí hiệu (d'_1), (d'_2) là ảnh của (d_1), (d_2) trong phép co đó, φ là góc nhọn tạo bởi (d'_1), (d'_2). Chứng minh rằng: $\text{tg}\varphi = \left|\frac{k(a_1 - a_2)}{k^2 + a_1a_2}\right|$ (*)

Từ (*) hãy suy ra rằng, điều kiện cần và đủ để $(d'_1) \perp (d'_2)$ là $a_1a_2 = -k^2$.

8. Cho elíp (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ và tam giác ngoại tiếp nó. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua tiếp điểm và đỉnh đối diện đồng quy.

9. Chứng minh rằng có vô số elíp ngoại tiếp một tam giác.

10. Chứng minh rằng có vô số elíp nội tiếp một tam giác.

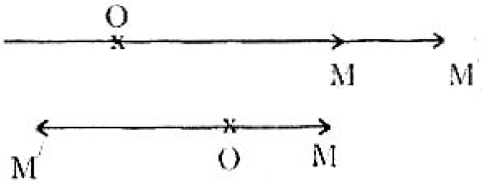
66. PHÉP BIẾN ĐỔI NGHỊCH ĐẢO

Định nghĩa

Cho điểm O và số thực $k \neq 0$, với mỗi điểm M khác O ta dựng điểm M' trên đường thẳng OM sao cho $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ với M trùng O, điểm M' không xác định và ta gán cho nó một điểm là điểm vô cực và kí hiệu ∞, ứng với điểm ∞ ta có điểm O, khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép nghịch đảo tâm O, hệ số k và kí hiệu $I_O(k)$: M → M'. Điểm O được gọi là tâm của phép nghịch đảo, k là hệ số nghịch đảo hoặc là phương tích của phép nghịch đảo.

Từ bây giờ mặt phẳng mà trên đó có xác định một phép nghịch đảo được bổ sung thêm một điểm đặc biệt. Đó là điểm vô cực ∞. Mặt phẳng như vậy được gọi là mặt phẳng bảo giác. Trên mặt phẳng bảo giác mọi đường thẳng đều đi qua điểm ∞, hai đường thẳng cắt nhau trên mặt phẳng bảo giác có hai điểm chung và do đó mỗi đường thẳng được xem như đường tròn có bán kính vô cùng lớn.

Hai đường thẳng song song trên mặt phẳng bảo giác là hai đường thẳng chỉ có một điểm chung là điểm ∞. Ta có thể xem hai đường thẳng song song là hai đường tròn có bán kính vô cùng lớn tiếp xúc với nhau tại điểm ∞. Trên mặt phẳng bảo giác, điểm được xem là đường tròn có bán kính bằng 0 và ta gọi điểm là đường tròn không. Rõ ràng phép nghịch đảo $I_O(k)$: M → M', thì biến M' → M



$\Leftrightarrow I_O(k).I_O(k) = E$ (E là phép đồng nhất). Tính chất đó của phép nghịch đảo được gọi là tính đối hợp.

Giả sử phép nghịch đảo $I_O(k)$ với $k > 0$, ta xét đường tròn (w) có tâm O và bán kính $R = \sqrt{k}$. Đường tròn (w) được gọi là đường tròn nghịch đảo thực. Trường hợp $k < 0$; đường tròn (w') tâm O bán kính $R' = \sqrt{|k|}$ được gọi là đường tròn nghịch đảo ảo.

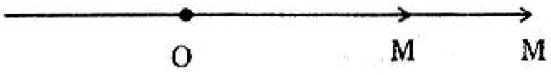
Cho một hình (F); tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc (F) lập thành một hình (F') được gọi là hình nghịch đảo của (F).

Các tính chất

Cho phép nghịch đảo $I_O(k)$, $k \neq 0, 1, -1$.

i) Ảnh của một đường thẳng (d) đi qua O trong phép biến đổi $I_O(k)$ chính là (d).

Thật vậy; nếu M là điểm bất kì thuộc (d), thì ảnh M' của M thuộc đường thẳng OM chính là (d).



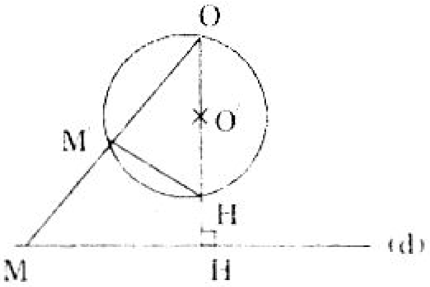
ii) Ảnh của một đường thẳng (d) không đi qua O trong phép biến đổi $I_O(k)$ là một đường tròn đi qua O.

Thật vậy; từ O ta dựng OH ⊥ (d) và trên OH ta dựng điểm H' sao cho $\overline{OH}.\overline{OH'} = k$ (*) $\Rightarrow$ H' là điểm cố định.

Giả sử M là điểm bất kì thuộc (d) và khác H, M' là ảnh của M trong phép biến đổi $I_O(k)$ $\Rightarrow$ $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$ (**)

Từ (*) và (**) ta suy ra: $\overline{OH}.\overline{OH'} = \overline{OM}.\overline{OM'}$

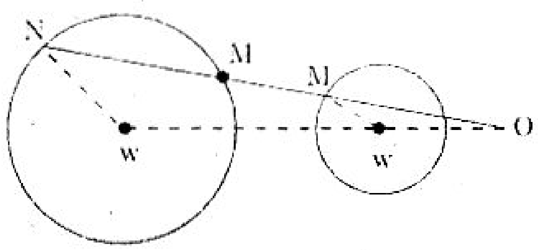
$\Rightarrow$ 4 điểm H, H', M', M cùng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow$ M' nhìn OH' dưới một góc vuông $\Rightarrow$ M' thuộc đường tròn đường kính OH'. Chính đường tròn đường kính OH' là ảnh của (d).



iii) Ảnh của một đường tròn đi qua O trong phép biến đổi $I_O(k)$ là một đường thẳng không đi qua O.

iiii) Ảnh của một đường tròn không đi qua O trong phép biến đổi $I_O(k)$ là một đường tròn.

Giả sử (w) là đường tròn không đi qua O và M là một điểm bất kì thuộc (w). Đường thẳng OM còn có một điểm chung thứ hai N với (w) (N và M có thể trùng nhau). Gọi M' là ảnh của M trong phép biến đổi $I_O(k)$; khi đó M' $\in$ OM. Ta kí hiệu p là phương tích của O đối với (w), khi đó OM.ON = p. Mặt khác, ta có $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$, vì vậy $\overline{OM'} = \frac{k}{p}\overline{ON}$; điều này chứng tỏ M' là ảnh của N trong phép vị tự tâm O, hệ số vị tự $\frac{k}{p}$; N thuộc đường tròn (w), thì M' thuộc đường tròn (w') là ảnh của (w) trong phép vị tự đó.



67. DÙNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO ĐỂ GIẢI TOÁN

Tính các yếu tố hình học

Ví dụ 1: Cho phép nghịch đảo $I_O(k)$ và đoạn AB (O không thuộc đường thẳng AB). Gọi A'B' là ảnh của AB trong phép biến đổi $I_O(k)$. Hãy tính độ dài A'B' theo k, OA, OB và AB.

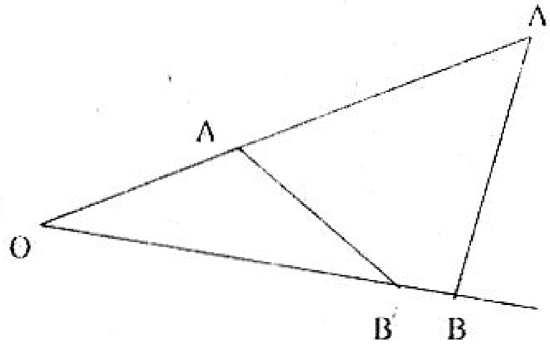
Giải

Từ hệ thức: OA.OA' = OB.OB' = k

$\Rightarrow$ $\Delta OAB \backsim \Delta OA'B'$

$$\Rightarrow \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA.OA'}{OB.OA} = \frac{|k|}{OB.OA}$$

$$\Rightarrow \quad A'B' = \frac{|k|}{OB.OA}$$



Chứng minh các tính chất hình học

Ví dụ 2: Cho tam giác đều ABC và điểm O bất kì. Chứng minh rằng trong số 3 độ dài OA, OB, OC tồn tại hai độ dài có tổng không nhỏ hơn độ dài thứ ba.

Giải

Ta xét trường hợp O không nằm trên các đường thẳng AB, BC, CA. Trong trường hợp đó ta kí hiệu A', B', C' là ảnh của các điểm A, B, C trong phép nghịch đảo $I_O(k)$ và theo kết quả trong ví dụ 1, ta có:

$$A'B' = \frac{|k|}{OB.OA}AB, \quad B'C' = \frac{|k|}{OB.OC}BC, \quad C'A' = \frac{|k|}{OC.OA}CA.$$

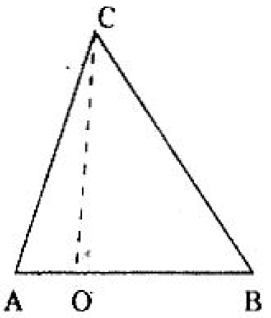
Từ bất đẳng thức: $A'B' + B'C' \geq C'A'$

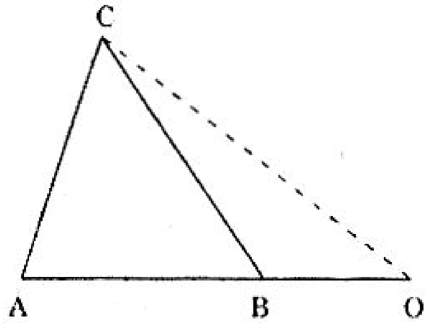
$$\Rightarrow \quad \frac{|k|}{OB.OA}AB + \frac{|k|}{OB.OC}BC \geq \frac{|k|}{OC.OA}CA$$

$\Rightarrow$ $OC + OA \geq OB.OC + OA = OB$, khi O thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trường hợp O thuộc đường thẳng AB và nằm ngoài AB về phía B. Rõ ràng trong tam giác OAC, ta có: $OA + OB = 2OB + BC > OC$.

O trên đoạn AB; bạn đọc tự kiểm tra.





Ví dụ 3: Cho đường tròn (w) và đường thẳng (d). Phép nghịch đảo $I_O(k)$ (O không thuộc (w) và O thuộc (d)) biến (w) thành đường tròn (w'), (d) thành (d). Chứng minh rằng (d) và (w) có điểm chung khi và chỉ khi (d) và (w') có điểm chung; (d) và (w) không có điểm chung khi và chỉ khi (d) và (w') không có điểm chung.

Giải

Ta biết rằng phép nghịch đảo có tính đối hợp; do đó nếu M là điểm chung của (w) và (d), thì ảnh M' của M cũng thuộc (w') và (d) và ngược lại.

Dựng hình

Ví dụ 4: Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau và đường thẳng (d) tiếp xúc ngoài với cả hai đường tròn tại các điểm A, B. Hãy dựng một đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn đã cho và tiếp xúc với (d).

Giải

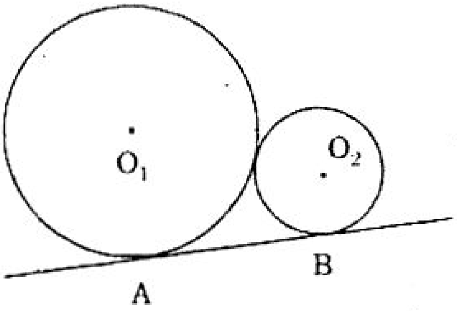
Giả sử (w) là đường tròn đã dựng thỏa mãn các điều kiện đã cho. Thực hiện phép nghịch đảo $I_A(k)$, $k = AB^2$, biến (O_1) thành đường thẳng $(d_1) // (d)$, biến (O_2) thành chính nó và (O_2) tiếp xúc với (d_1), biến (d) thành (d). (w) thành (w') tiếp xúc với (d_1), (d) và (O_2). Từ đó ta có cách dựng như sau:

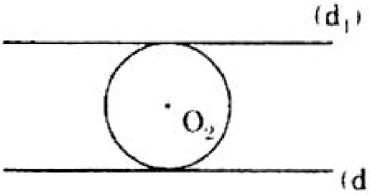
i) Dựng ảnh (d_1) của (O_1) và trong phép nghịch đảo $I_A(k)$, $k = AB^2$.

ii) Dựng đường tròn (w') tiếp xúc với (O_2) và hai đường thẳng song song (d), (d_1).

iii) Dựng ảnh (w) của (w') trong phép nghịch đảo $I_A(k)$, (w) là đường tròn cần dựng.

Bài toán có hai nghiệm, vì có hai đường tròn (w').





68. CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

Tính các yếu tố hình học

1. Cho tam giác ABC và điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác có bán kính R. Phép nghịch đảo $I_O(R)$ biến $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

i) Tính các đoạn A'B', B'C', C'A' theo R và các cạnh tam giác: $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$.

ii) Tính các góc của tam giác A'B'C'.

iii) Tính diện tích tam giác A'B'C'.

2. Tính khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp tam giác đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Chứng minh các tính chất hình học

1. Chứng minh rằng phép nghịch đảo $I_O(k)$ biến đường tròn nghịch đảo thành chính nó.

2. Chứng minh rằng nếu đường tròn (w) chứa trong nó tâm O của phép nghịch đảo $I_O(k)$, thì ảnh của mọi điểm nằm trong (w) phải nằm ngoài (w') ((w') là ảnh của (w) trong phép nghịch đảo đó).

3. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I. Ta kí hiệu H là chân đường cao tam giác hạ từ A, D là tiếp điểm của I và cạnh BC, K là tiếp điểm của đường tròn (w) bàng tiếp trong góc $\widehat{A}$ của tam giác, M là trung điểm của cạnh BC.

i) Chứng minh rằng M cũng là trung điểm của DK.

ii) Chứng minh rằng phép nghịch đảo tâm M, hệ số nghịch đảo $k = MD^2$ biến I thành I, (w) thành (w), đường tròn Ơle của tam giác ABC thành đường thẳng (d) tiếp xúc với cả hai đường tròn (I) và (w).

iii) Chứng minh rằng đường tròn Ơle tiếp xúc với đường tròn (I) và các đường tròn bàng tiếp của tam giác.

4. Để một tứ giác lồi ABCD nội tiếp được trong đường tròn, điều kiện cần và đủ là: AB.CD + AD.BC = AC.BD.

Dựng hình

1. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B. Trên đường thẳng AB ta lấy điểm C nằm ngoài cả hai đường tròn. Hãy dựng đường tròn (O) đi qua C và tiếp xúc đồng thời với cả hai đường tròn đã cho.

2. Cho đường tròn (O) và 3 điểm M, N, P nằm ngoài (O). Hãy dựng tam giác ABC nội tiếp trong (O) và các đường thẳng AB, BC, CA lần lượt đi qua 3 điểm đã cho.

3. Dựng đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn đã cho.

4. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{A} = \alpha$, BC = a, đường cao $BD = h_1$,
và $BD.AB = k^2$.

5. Dựng tam giác ABC, biết $\hat{A} - \hat{C} = \alpha$, BC.BA = m và đường cao BD = h.

6. Cho hai điểm A, B và đường tròn (O). Hãy dựng đường tròn (O') đi qua A, B và cắt (O') tại điểm C sao cho tiếp tuyến của cả hai đường tròn tại đó tạo thành một góc α cho trước.

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Chương I

VÉC TƠ VÀ TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Véc tơ trong mặt phẳng

1. Tóm lược những định nghĩa và khái niệm về véc tơ trong mặt phẳng 5
2. Dùng định nghĩa và các quan hệ để giải toán 7
3. Các bài toán tự giải 8
4. Tóm lược về các phép toán véc tơ 12
5. Dùng các phép toán véc tơ và các hệ quả để giải toán 14
6. Dùng tâm tỉ cự để giải toán 25
7. Tóm lược điều kiện đồng phương của hai véc tơ 34
8. Dùng điều kiện đồng phương để giải toán 35
9. Các bài toán tự giải 42

Tọa độ trong mặt phẳng

10. Trục tọa độ và hệ trục tọa độ 50
11. Tóm lược lí thuyết véc tơ trên một trục tọa độ 51
12. Dùng véc tơ trên trục tọa độ để giải toán 52
13. Các bài toán tự giải 53
14. Tóm lược véc tơ trong hệ tọa độ trực chuẩn 55
15. Dùng véc tơ trong hệ trực chuẩn để giải toán 56
16. Các bài toán tự giải 57
17. Phương trình đường cong 59
18. Phương trình đường thẳng và đường tròn trong hệ trực chuẩn 60
19. Dùng phương trình đường thẳng và đường tròn để giải các bài toán 61
20. Các bài toán tự giải 63
21. Tóm lược lí thuyết về hàm số lượng giác của một góc (cung) α với $0 < \alpha < 180^0$ 65
22. Vận dụng các định nghĩa và các tính chất để giải toán 66
23. Các bài toán tự giải 68

Chương II

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG HÌNH HỌC

24. Tóm lược lí thuyết về tích vô hướng của hai véc tơ trong mặt phẳng 71
25. Dùng tích vô hướng để giải toán 72
26. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng 89
27. Dùng biểu thức tọa độ của tích vô hướng để giải toán 90
28. Các bài toán tự giải 95
29. Định lí hàm sin và hàm cos 96
30. Dùng các định lí hàm sin và hàm cos vào việc giải toán 97
31. Các bài toán tự giải 100
32. Tổng và hiệu bình phương các khoảng cách từ một điểm đến hai đầu mút của một đoạn thẳng 111
33. Dùng các hệ thức vào việc giải toán 111
34. Các bài toán tự giải 114
35. Tóm lược lí thuyết về hệ thức lượng trong đường tròn 118
36. Dùng phương tích và trục đẳng phương để giải toán 119
37. Các bài toán tự giải 122
38. Phương tích trong hệ tọa độ trực chuẩn 134
39. Các bài toán tự giải 135

Chương III

CÁC PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

40. Đại cương về phép biến đổi hình học 138
41. Các phép dời hình và chúng để giải toán 138
42. Tóm lược lí thuyết về phép đối xứng tâm 138
43. Dùng phép đối xứng tâm để giải toán 139
44. Các bài toán tự giải 141
45. Tóm lược lí thuyết về phép đối xứng qua một đường thẳng 147
46. Dùng phép đối xứng qua một đường thẳng để giải toán 148
47. Các bài toán tự giải 151
48. Tóm lược lí thuyết về phép tịnh tiến 160
49. Dùng phép tịnh tiến để giải toán 161
50. Các bài toán tự giải 164

51. Tóm lược lí thuyết về phép quay 172

52. Dùng phép quay để giải toán 173

53. Các bài toán tự giải 177

Phép vị tự và phép đồng dạng

54. Tóm lược lí thuyết về phép vị tự 185

55. Dùng phép vị tự để giải toán 185

56. Các bài toán tự giải 188

57. Tóm lược lí thuyết về đồng dạng 198

58. Dùng phép đồng dạng để giải toán 199

59. Các bài toán tự giải 201

PHỤ LỤC

60. Tích của hai phép quay 207

61. Dùng tích hai phép quay để giải toán 209

62. Các bài toán tự giải 210

63. Phép co và dãn 210

64. Dùng phép co và dãn để giải toán 212

65. Các bài toán tự giải 214

66. Phép biến đổi nghịch đảo 215

67. Dùng phép nghịch đảo để giải toán 217

68. Các bài toán tự giải 219

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9715012; (04) 7547936; Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: **PHÙNG QUỐC BẢO**
Tổng biên tập: **PHẠM THÀNH HƯNG**

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập: **ĐỨC HOÀNG**
QUỐC TUẤN
Trình bày bìa: **THÁI VĂN**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG 10

Mã số: 1L – 69 ĐH 2005
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Công ty phát triển CN truyền hình TP.HCM. Số xuất bản: 104 – 2005/CXB/9 – 243/ĐHQGHN, ngày 10/11/2005.
Quyết định xuất bản số: 51KH/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006.